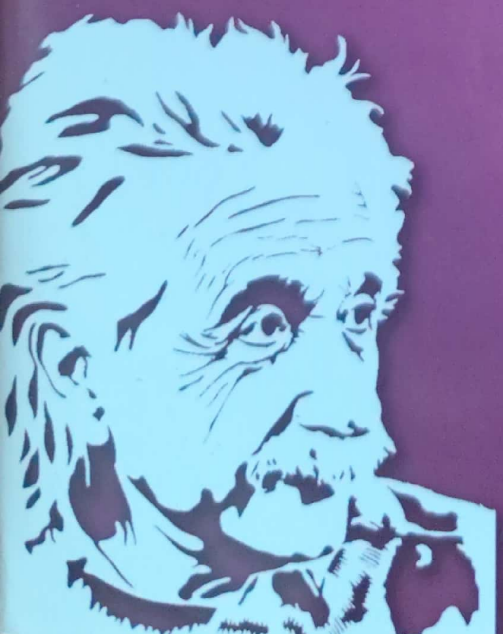
MECANICĂ

Teme de casă şi teste de examen pentru studenţii Facultăţii de Electromecanică

DUMITRU DELEANU
CRISTIAN BRAIA



CRIZON

POPA MIHAI

DUMITRU DELEANU CRISTIAN BRAIA

MECANICĂ

Teme de casă şi teste de examen pentru studenţii Facultăţii de Electromecanică

Editura CRIZON
Constanţa, 2009

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
DELEANU, DUMITRU
Mecanică : teme de casă şi teste de examene pentru studenţii Facultăţii de Electromecanică / Dumitru Deleanu, Cristian Braia. - Constanţa : Crizon, 2009
Bibliogr.
ISBN 978-973-1909-57-8

I. Braia, Cristian

53:62(075.8)

Coperta: CRIZON

Tipărit în Bulgaria

© 2009 – Editura CRIZON
Nicio parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă sub nicio formă fără acordul scris al Editurii CRIZON

ISBN 978-973-1909-57-8
Editura CRIZON, http://www.crizon.ro
pentru comenzi: editura.crizon@yahoo.com
mobil: 0722.87.00.42 fax: 0341.815.780

Prefaţă

Lucrarea de faţă reprezintă o completare a tratatului „Mecanică – teorie şi aplicaţii", autor Dumitru DELEANU, apărut la editura CRIZON în anul 2008.

Dacă mai sus-menţionata lucrare conţine cursul de Mecanică teoretică predat studenţilor Facultaţii de Navigaţie şi Transport Naval din Universitatea Maritimă Constanţa precum şi suportul orelor de seminar, prezentul volum strânge la un loc temele de casă pe care studenţii le au spre rezolvare pe parcursul semestrului şi testele pe care le vor primi la examenul propriu-zis.

Lucrarea este structurată pe două capitole. Primul dintre ele este dedicat unui număr de şase teme de casă, reprezentând capitole importante din statică, cinematică şi dinamică. Fiecare temă conţine un breviar teoretic, o aplicaţie rezolvată complet şi o aplicaţie propusă spre rezolvare.

In al doilea capitol sunt incluse un număr de 16 teste, dintre care vor fi selectate cele supuse spre rezolvare studenţilor la examenul de sfârşit de semestru. Testele sunt concepute astfel încât să permită verificarea unui volum cât mai mare de cunoştiinţe şi o anumită libertate în alegerea subiectelor pentru atingerea pragului minim pentru promovare.

Sperăm că prezenta lucrare va reuşi să fie de real folos studenţilor care se pregătesc pentru examenul de Mecanică.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

PREFAŢĂ 3

CUPRINS 5

1. TEME DE CASA 7

Tema nr. 1: Reducerea sistemelor de forţe 7
Tema nr. 2: Centre de masă 13
Tema nr. 3: Echilibrul sistemelor de solide rigide 19
Tema nr. 4: Cinematica mişcării absolute a punctului material 23
Tema nr. 5: Cinematica mişcării absolute a solidului rigid 31
Tema nr. 6: Cinematica mişcării relative a punctului material 39
Tema nr. 7: Dinamica mişcării absolute a punctului material 43
Tema nr. 8: Noţiuni fundamentale ale dinamicii 49

2. TESTE DE EXAMEN 61

Testul nr. 1 61
Testul nr. 2 62
Testul nr. 3 63
Testul nr. 4 64
Testul nr. 5 66
Testul nr. 6 67
Testul nr. 7 68
Testul nr. 8 69
Testul nr. 9 71
Testul nr. 10 72
Testul nr. 11 73
Testul nr. 12 74
Testul nr. 13 75
Testul nr. 14 76
Testul nr. 15 77
Testul nr. 16 78
Testul nr. 17 79
Testul nr. 18 80
Testul nr. 19 80
Testul nr. 20 81
Testul nr. 21 82
Testul nr. 22 83
Testul nr. 23 84

BIBLIOGRAFIE 86

Scanned with OKEN Scanner

Teme de casă

Tema nr. 1

Reducerea sistemelor de forţe

I 1) Asupra unui paralelipiped dreptunghic OABCDELK, reprezentat ca in figura I 1.1, acţionează un sistem de trei forţe şi un cuplu, mărimea, direcţia şi sensul lor fiind date în tabelul T 1.1. Se cere:

a) Torsorul de reducere în O şi reprezentarea acestui torsor;
b) Să se precizeze cu ce este echivalent sistemul;
c) Să se determine ecuaţiile axei centrale;
d) Să se determine torsorul de reducere într-un punct al axei centrale.

Observaţie: Punctele c) şi d) vor fi parcurse doar dacă cazul de reducere o impune.

Breviar teoretic:

B 1. Torsorul unui sistem de forţe în raport cu un punct. Torsor minimal. Axă centrală.

Fiind dat sistemul de forţe $\vec{F}_i, i=\overline{1,n}$, care acţionează în punctele $A_i, i=\overline{1,n}$, de vectori de poziţie $\vec{r}_i, i=\overline{1,n}$, în raport cu punctul O, elementele *torsorului de reducere* sunt:

- *forţa rezultantă* $\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$;
- *momentul rezultant* $\vec{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i$.

Vom folosi notaţia: $\tau_O \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{cases}$.

Momentul rezultant are valoarea minimă egală cu proiecţia vectorului moment rezultant pe direcţia forţei rezultante:

$$\vec{M}_{\min}=\vec{M}_R=\frac{\vec{R}\cdot\vec{M}_O}{R^2}\cdot\vec{R}$$

Torsorul alcătuit din rezultanta $\vec{R}$ şi momentul minim $\vec{M}_{\min}$ se numeşte *torsor minimal*:

Scanned with OKEN Scanner

$$\tau_{\min}\begin{cases}\vec{R}\\ \vec{M}_{\min}\end{cases}.$$

Locul geometric al punctelor în care făcând reducerea se obţine torsorul minimal se numeşte *axă centrală*. Pe axa centrală vectorul moment rezultant şi vectorul forţă rezultantă sunt vectori coliniari. *Ecuaţiile axei centrale* sunt:

$$\frac{M_{Ox}-yR_z+zR_y}{R_x}=\frac{M_{Oy}-zR_x+xR_z}{R_y}=\frac{M_{Oz}-xR_y+yR_x}{R_z},$$

unde $\vec{R}(R_x,R_y,R_z)$ şi $\vec{M}_O(M_{Ox},M_{Oy},M_{Oz})$. Ecuaţiile axei centrale reprezintă ecuaţiile unei drepte dată ca intersecţie de două plane.

B 2. Cazurile de reducere ale unui sistem de forţe oarecare.

Făcând reducerea unui sistem de forţe oarecare în raport cu un pol O se poate ajunge la unul din următoarele cazuri de reducere:

Cazul I: $\vec{R}=\vec{0},\vec{M}_O=\vec{0}$ - Sistemul de forţe se numeşte *echivalent cu zero,* fiind echivalent cu orice sistem de forţe care are torsorul nul.

Cazul II: $\vec{R}\neq\vec{0},\vec{M}_O=\vec{0}$ - *Sistemul de forţe este echivalent cu o forţă unică,* egală cu rezultanta $\vec{R}$, situată pe axa centrală, care trece prin punctul de reducere O.

Cazul III: $\vec{R}=\vec{0},\vec{M}_O\neq\vec{0}$: *Sistemul de forţe este echivalent cu orice cuplu de forţe* care acţionează într-un plan perpendicular pe $\vec{M}_O$ şi *al cărui moment să coincidă cu* $\vec{M}_O$ ca sens şi mărime.

Cazul IV : $\vec{R}\neq\vec{0},\vec{M}_O\neq\vec{0}$. Se disting două situaţii:

a) $\vec{R}\cdot\vec{M}_O=0\left(\vec{R}\perp\vec{M}_O\right)$ - *Sistemul de forţe este echivalent cu o forţă unică,* egală cu $\vec{R}$, ce acţionează pe axa centrală, aceasta netrecând prin punctul de reducere O;

b) $\vec{R}\cdot\vec{M}_O\neq 0\left(\vec{R}\perp\vec{M}_O\right)$ - *Sistemul de forţe este echivalent cu torsorul minimal* aplicat pe axa centrală.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea temei nr. I

Varianta nr. 0 (figura I 1.2)

a) $\vec{F}_1 = -F_1\,\vec{i} = -4\,\vec{i}$, $\vec{F}_2 = F_2\,\vec{k} = 6\,\vec{k}$, $\vec{F}_3 = -F_3\,\vec{j} = -8\,\vec{j}$, $\vec{M} = M\,\vec{j} = 10\,\vec{j}$.

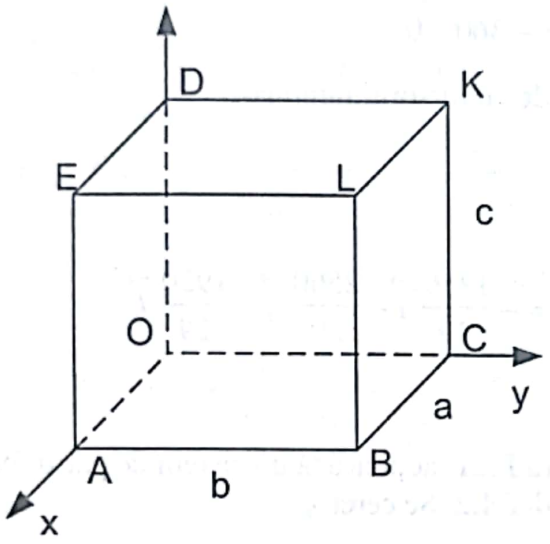


Figura I 1.1

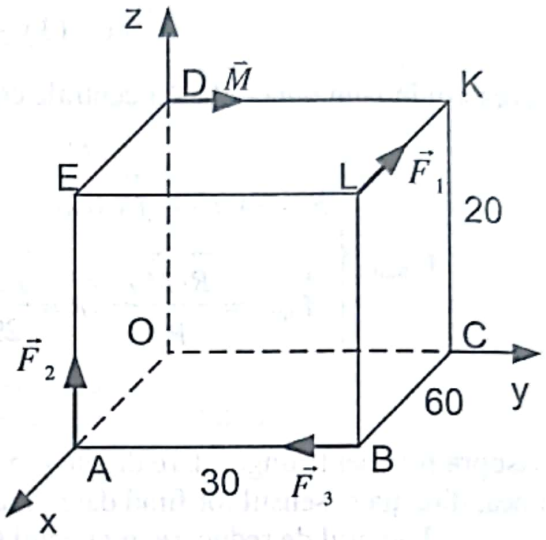


Figura I 1.2

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) = \vec{OL}\times\vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 60 & 30 & 20 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -80\,\vec{j} + 120\,\vec{k};$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) = \vec{OA}\times\vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -360\,\vec{j};$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_3\right) = \vec{OB}\times\vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 60 & 30 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -480\,\vec{k}.$$

$$\tau_O \begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -4\,\vec{i} - 8\,\vec{j} + 6\vec{k} \\ \vec{M}_O = \vec{M} + \vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}_3\right) = -430\,\vec{j} - 360\,\vec{k} \end{cases}$$

b) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$, $\vec{R}\cdot\vec{M}_O = (-4)\cdot 0 + (-8)\cdot(-430) + 6\cdot(-360) = 1280 \neq 0$.

Sistemul de forţe este echivalent cu torsorul minimal (vezi punctul d).

Scanned with OKEN Scanner

c) Ecuaţiile axei centrale se particularizează după cum urmează:

$$\frac{0-6y-8z}{-4}=\frac{-430+4z+6x}{-8}=\frac{-360+8x-4y}{6}.$$

Prelucrând aceste ecuaţii se obţine axa centrală ca intersecţie de două plane:

$$\begin{cases}3x+6y+10z-215=0\\8x-13y-12z-360=0\end{cases}.$$

d) Torsorul într-un punct al axei centrale coincide cu torsorul minimal:

$$\tau_{\min}\begin{cases}\vec{R}=-4\,\vec{i}-8\,\vec{j}+6\,\vec{k}\\ \vec{M}_{\min}=\dfrac{\vec{R}\cdot\vec{M}_O}{R^2}\cdot\vec{R}=\dfrac{320}{29}\vec{R}=-\dfrac{1280}{29}\vec{i}-\dfrac{2560}{29}\vec{j}+\dfrac{1920}{29}\vec{k}\end{cases}.$$

I 2) Asupra prismei triunghiulare drepte din figura I 2.1. acţionează un sistem de patru forţe, mărimea, direcţia şi sensul lor fiind date în tabelul T 1.2. Se cere:

a) Torsorul de reducere în punctul O;
b) Cu ce este echivalent sistemul de forţe?
c) Ecuaţiile axei centrale;
d) Torsorul minimal.

Observaţii : i) Punctele c) şi d) vor fi parcurse doar dacă cazul de reducere o impune;
ii) Punctele F, G, H sunt alese astfel încât $FE=FB$, $HC=HO$, $GD=GA$.

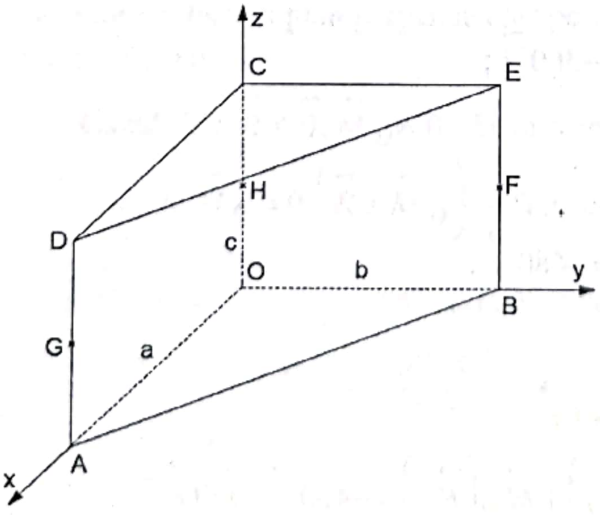


Figura I 2.1

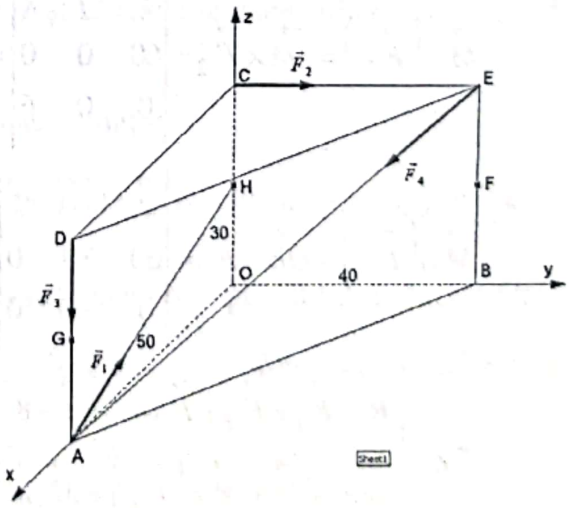


Figura I 2.2

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare:

Varianta nr. 0 (figura I 2.2)

a) $\vec{F}_1 = F_1 \cdot \frac{\vec{AH}}{AH} = 12 \cdot \frac{-50\,\vec{i} + 15\,\vec{k}}{\sqrt{(-50)^2 + 15^2}} = -\frac{120}{\sqrt{109}}\,\vec{i} + \frac{36}{\sqrt{109}}\,\vec{k} = -11{,}494\,\vec{i} + 3{,}448\,\vec{k}$;

$\vec{F}_2 = F_2\,\vec{j} = 16\,\vec{j}$, $\vec{F}_3 = -F_3\,\vec{k} = -25\,\vec{k}$;

$$\vec{F}_4 = F_4 \cdot \frac{\vec{EA}}{EA} = 9 \cdot \frac{50\,\vec{i} - 40\,\vec{j} - 30\,\vec{k}}{\sqrt{50^2 + (-40)^2 + (-30)^2}} = \frac{45}{\sqrt{50}}\,\vec{i} - \frac{36}{\sqrt{50}}\,\vec{j} - \frac{27}{\sqrt{50}}\,\vec{k} =$$

$$= 6{,}364\,\vec{i} - 5{,}091\,\vec{j} - 3{,}818\,\vec{k};$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) = \vec{OA} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 50 & 0 & 0 \\ -\frac{120}{\sqrt{109}} & 0 & \frac{36}{\sqrt{109}} \end{vmatrix} = -\frac{1800}{\sqrt{109}}\,\vec{j} \cong -172{,}409\,\vec{j};$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) = \vec{OC} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & 16 & 0 \end{vmatrix} = -480\,\vec{i};$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_3\right) = \vec{OD} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 50 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 1250\,\vec{j};$$

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_4\right) = \vec{OE} \times \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 40 & 30 \\ \frac{45}{\sqrt{50}} & -\frac{36}{\sqrt{50}} & -\frac{27}{\sqrt{50}} \end{vmatrix} = 135\sqrt{2}\,\vec{j} - 180\sqrt{2}\,\vec{k} \cong 190{,}919\,\vec{j} - 254{,}558\,\vec{k}$$

b) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{R} \cdot \vec{M}_O = (-5{,}130) \cdot (-480) + 10{,}909 \cdot 1268{,}51 +$

$$+ (-25{,}370) \cdot (-254{,}558) = 22758{,}712 \neq 0$$

Sistemul de forţe este echivalent cu torsorul minimal (vezi punctul d);

c) Prin înlocuirea elementelor torsorului de reducere în ecuaţiile axei centrale se obţine:

$$\frac{-480 + 25{,}37\,y + 10{,}909\,z}{-5{,}130} = \frac{1268{,}51 + 5{,}13\,z - 25{,}37\,x}{10{,}909} = \frac{-254{,}558 - 10{,}909\,x - 5{,}13\,y}{-25{,}370}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, după prelucrare:

$$\begin{cases} 130{,}148\,x - 276{,}761\,y - 145{,}323\,z - 1463{,}136 = 0 \\ 55{,}963\,x + 669{,}954\,y + 276{,}761\,z - 10871{,}717 = 0 \end{cases}.$$

d) $\tau_{\min}$ $\begin{cases} \vec{R} = -5{,}130\,\vec{i} + 10{,}909\,\vec{j} - 25{,}370\,\vec{k} \\ \vec{M}_{\min} = \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{M}_O}{R^2}\cdot\vec{R} = 28{,}883\,\vec{R} = -148{,}173\,\vec{i} + 315{,}091\,\vec{j} - 732{,}777\,\vec{k} \end{cases}.$

Tabelul T 1.1

Nr. variantă	Dimensiunile paralelipipedului dreptunghic(cm)			$\vec{F}_1$		$\vec{F}_2$		$\vec{F}_3$		$\vec{M}$	
	a	b	c	Modul (N)	Direcţie şi sens	Modul (N)	Direcţie şi sens	Modul (N)	Direcţie şi sens	Modul (N)	Direcţie şi sens
0	60	30	20	4	LK	6	AE	8	BA	10	DK
1	20	25	20	8	OD	10	DL	8	KC	9	BO
2	40	20	30	10	AD	5	BO	10	KB	5	DL
3	30	40	20	10	EA	12	OC	10	CK	8	KL
4	20	20	10	6	OD	8	BA	6	KL	8	DK
5	25	45	30	9	OA	10	LE	16	KC	6	OL
6	30	20	40	9	AB	8	BK	12	EC	14	DL
7	30	20	30	11	OC	10	OK	10	DK	30	AD
8	15	25	40	10	AC	8	KA	20	EK	15	EO
9	40	50	10	7	BL	8	KE	16	DB	30	EC
10	40	30	120	12	KD	9	OA	14	AC	20	BC
11	35	40	50	8	EB	6	AC	10	CD	25	LE
12	70	10	30	6	CK	10	BD	12	EA	12	OB
13	25	45	60	9	AE	14	BO	11	KA	25	BC
14	60	60	20	12	BA	7	LK	12	LC	28	DA
15	25	50	80	10	CE	10	BC	40	BO	20	AE

Tabelul T 1.2

Nr. variantă	Dimensiunile prismei dreptunghiulare(cm)			$\vec{F}_1$		$\vec{F}_2$		$\vec{F}_3$		$\vec{F}_4$	
	a	b	c	Modul (N)	Direcţie şi sens	Modul (N)	Direcţie şi sens	Modul (N)	Direcţie şi sens	Modul (N)	Direcţie şi sens
0	50	40	30	12	AH	16	CE	25	DA	9	EA
1	40	15	20	10	CO	18	DB	20	DC	15	BA
2	70	30	10	15	OD	10	BE	14	EO	18	AB
3	25	40	60	14	GB	25	EC	10	AO	6	FC
4	60	60	10	12	OF	8	AD	27	HB	11	BO
5	80	60	100	4	BE	22	CA	18	FH	17	OA
6	25	15	40	25	HB	10	CE	16	BA	4	OE
7	20	30	40	10	CB	12	OG	10	EC	9	DA
8	30	45	20	11	FA	10	BE	30	OC	14	CD
9	50	20	80	8	EC	6	AH	25	AE	10	DF
10	30	40	50	14	OC	9	CD	11	DB	28	AB
11	60	50	50	10	CA	10	BE	17	OA	6	HF
12	35	45	25	10	HG	5	GB	35	AD	12	CB
13	10	80	45	9	BH	16	FO	20	BO	14	DC
14	40	15	60	18	CE	20	BA	4	DB	15	AD
15	90	35	20	4	GO	8	BE	6	CB	30	OF

Scanned with OKEN Scanner

Tema nr. 2

Centre de masă

II 1) Se consideră placa omogenă din figura II 1.1. pentru care se dau:

$$a = 20 + 3n\,;\ b = 10 + \frac{n}{2}\,;\ \lambda = 0{,}7\,;\ \eta = 0{,}2 + 0{,}1 \cdot \left[\frac{n}{10}\right],$$

unde $n \in N^*$ este un număr fixat iar [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Porţiunea BC face parte dintr-o elipsă cu centrul în O' şi de semiaxe O'B şi O'C. Pentru valoarea impusă a numărului n, să se determine coordonatele centrului de masă al plăcii. Dimensiunile plăcii sunt date în cm.

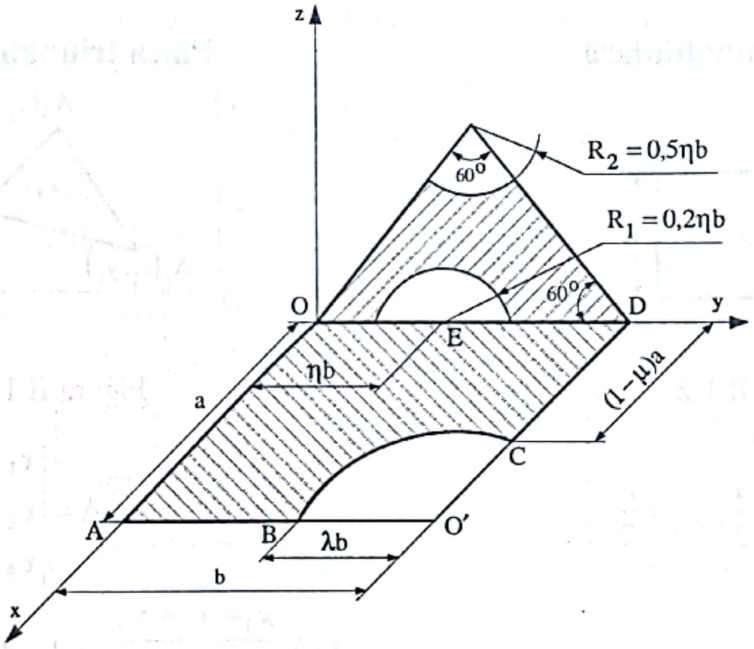


Figura II 1.1

Breviar teoretic:

Pentru o placă omogenă de secţiune constantă centrul de masă este dat prin vectorul său de poziţie

$$\vec{r}_C = \frac{\int_{(A)} \vec{r}\, dA}{\int_{(A)} dA}$$

unde integralele se calculează pe aria A a corpului. Dacă se realizează o împărţire a plăcii în plăci elementare şi se notează cu $\vec{r}_i, i = \overline{1,p}$, vectorul de poziţie al centrului de masă nr. "i" şi cu $A_i, i = \overline{1,p}$, aria sa, atunci vectorul de poziţie al centrului de masă al plăcii se determină cu relaţia:

Scanned with OKEN Scanner

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{p} A_i}$$

iar coordonatele centrului de masă rezultă prin proiecţie pe axele reperului cartezian Oxyz:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} A_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{p} A_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i z_i}{\sum_{i=1}^{p} A_i} \qquad (*)$$

unde $\vec{r}_i = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$.

În cele ce urmează se prezintă modul de calcul al ariei şi poziţiei centrului de masă pentru plăcile elementare care compun placa din figura II 1.1.

Placa dreptunghiulară

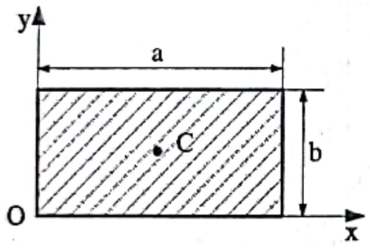


Figura II 1.2

$$A = a\,b,\ x_C = \frac{a}{2},\ y_C = \frac{b}{2}$$

Placa triunghiulară

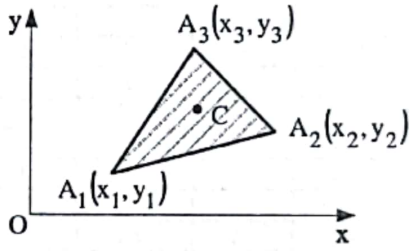


Figura II 1.3

$$A = \frac{|\Delta|}{2}, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Placa în formă de sector de cerc

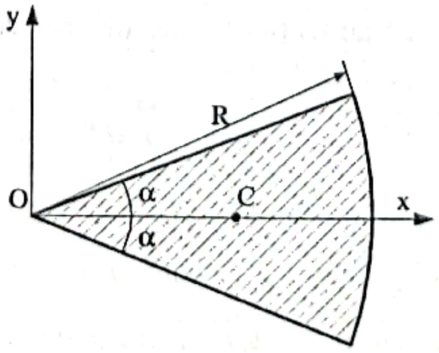


Figura II 1.4

Scanned with OKEN Scanner

$$A=\alpha R^2,\ x_C=OC=\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad(\alpha \text{ in radiani})$$

Placa în formă de sfert de elipsă

Coordonatele centrului de masă al plăcii plane omogene, mărginită de curbele $y=f(x)$ şi $y=g(x)$ şi dreptele verticale $x=x_1, x=x_2$ (figura II 1.5) sunt date de relaţiile:

$$x_C=\frac{\int_{x_1}^{x_2}x\left(f(x)-g(x)\right)dx}{\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx},\qquad y_C=\frac{1}{2}\frac{\int_{x_1}^{x_2}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx}{\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx}$$

iar aria sa de relaţia $A=\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx$. În cazul sfertului de elipsă din figura II 1.6, provenind din elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avem $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, g(x)=0$, $x_1=0, x_2=a$, astfel încât $A=\frac{\pi ab}{4}, x_C=\frac{4a}{3\pi}, y_C=\frac{4b}{3\pi}$.

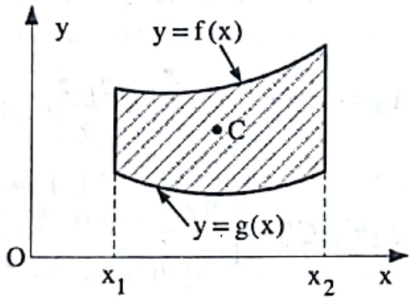


Figura II 1.5

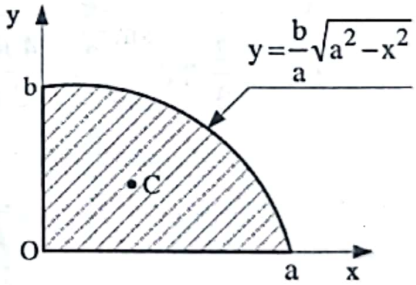


Figura II 1.6

Rezolvare:

Placa omogenă dată se împarte în 5 elemente, dintre care elementele 3, 4 şi 5 se scad din elementele 1 şi 2. Pentru elementele care se scad (nehaşurate) aria se consideră cu semnul "-" iar pentru cele haşurate cu semnul "+".

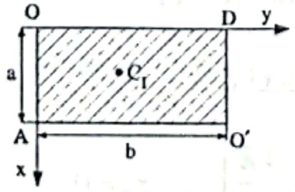


Figura II 1.7

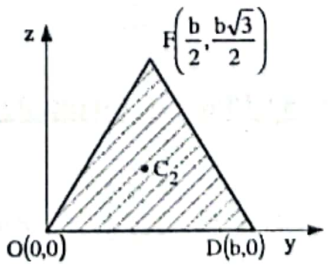


Figura II 1.8

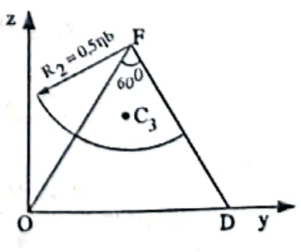


Figura II 1.9

Scanned with OKEN Scanner

Elementul nr. 1 : Placa dreptunghiulară OAO'D (figura II 1.7)

$$A_1 = ab \quad , \quad x_1 = \frac{a}{2} \quad , \quad y_1 = \frac{b}{2} \quad , \quad z_1 = 0$$

Elementul nr. 2 : Placa triunghiulară ODF (figura II 1.8)

$$A_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{y_O + y_D + y_F}{3} = \frac{b}{2}, \quad z_2 = \frac{z_O + z_D + z_F}{3} = \frac{b\sqrt{3}}{6}$$

Elementul nr. 3 : Placa în formă de sector de cerc cu centrul în F (figura II 1.9)

$$FC_3 = \frac{2}{3} R_2 \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{2R_2}{\pi} = \frac{\eta b}{\pi} \quad , \quad A_3 = -\frac{\pi}{6} R_2^2 = -\frac{\pi}{24} \eta^2 b^2,$$

$$x_3 = 0 \quad , \quad y_3 = \frac{b}{2} \quad , \quad z_3 = z_F - FC_3 = b\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\eta}{\pi}\right).$$

Elementul nr. 4 : Placa în formă de semicerc cu centrul în E (figura II 1.10)

$$EC_4 = \frac{2}{3} R_1 \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R_1}{3\pi} = \frac{4\eta b}{15\pi} \quad , \quad A_4 = -\frac{\pi}{2} R_1^2 = -\frac{\pi}{50} \eta^2 b^2,$$

$$x_4 = 0 \quad , \quad y_4 = y_E = \eta b \quad , \quad z_4 = EC_4 = \frac{4\eta b}{15\pi}.$$

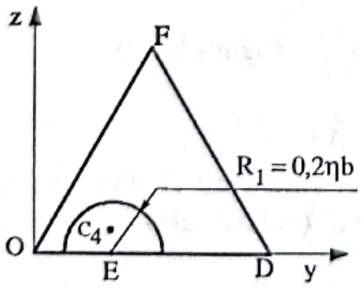


Figura II 1.10

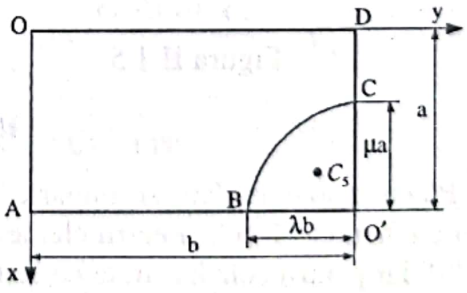


Figura II 1.11

Elementul nr. 5 : Placa în formă de sfert de elipsă

$$A_5 = -\frac{\pi \lambda \mu a b}{4} \quad , \quad x_5 = a\left(1 - \frac{4\mu}{3\pi}\right) \quad , \quad y_5 = b\left(1 - \frac{4\lambda}{3\pi}\right) \quad , \quad z_5 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele centrului de masă pentru placa plană omogenă din figura II 1.1 sunt date de relaţiile:

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{5}A_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{5}A_i}\quad,\quad y_C=\frac{\sum_{i=1}^{5}A_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{5}A_i}\quad,\quad z_C=\frac{\sum_{i=1}^{5}A_i\,z_i}{\sum_{i=1}^{5}A_i}$$

Caz particular : n = 20

$a=80\,cm$; $b=20\,cm$; $\lambda=0{,}7$; $\mu=0{,}3$, $\eta=0{,}4$;

$A_1=1600\,cm^2$; $x_1=40\,cm$; $y_1=10\,cm$; $z_1=0\,cm$;

$A_2=173{,}205\,cm^2$; $x_2=0\,cm$; $y_2=10\,cm$; $z_1=5{,}773\,cm$;

$A_3=-8{,}377\,cm^2$; $x_3=0\,cm$; $y_3=10\,cm$; $z_3=14{,}772\,cm$;

$A_4=-4{,}021\,cm^2$; $x_4=0\,cm$; $y_4=8\,cm$; $z_4=0{,}679\,cm$;

$A_5=-263{,}894\,cm^2$; $x_5=69{,}814\,cm$; $y_5=14{,}058\,cm$; $z_5=0\,cm$;

$x_C=30{,}447\,cm$; $y_C=9{,}289\,cm$; $z_C=0{,}583\,cm$.

II 2) Se consideră placa din figura II 2, alcătuită din trei plăci de densităţi diferite (situate în cele trei plane de coordonate) pentru care se dau: $a=25+5n$; $b=100-4n$; $\alpha=0{,}1+0{,}3\cdot\left[\frac{n}{5}\right]$; $\beta=0{,}1+\left\{\frac{n}{100}\right\}$; $\mu=0{,}4\cdot\left\{\frac{n}{25}\right\}$; $\eta=0{,}5\cdot\left\{\frac{n}{10}\right\}$, unde $n\in N^*$ este un număr fixat, [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x iar {x} partea sa fracţionară ($\{x\}=x-[x]$). Porţiunea CD face parte dintr-o elipsă cu centrul în G şi de semiaxe GC şi GD. Pentru valoarea impusă a numărului n, să se determine coordonatele centrului de masă.

Observaţii; i) Dimensiunile sunt date în cm.
ii) A se parcurge breviarul teoretic prezentat la rezolvarea problemei precedente. Densităţile celor trei plăci fiind diferite, relaţiile (*) se înlocuiesc prin:

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{p}\rho_i\,A_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{p}\rho_i\,A_i}\quad,\quad y_C=\frac{\sum_{i=1}^{p}\rho_i\,A_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{p}\rho_i\,A_i}\quad,\quad z_C=\frac{\sum_{i=1}^{p}\rho_i\,A_i\,z_i}{\sum_{i=1}^{p}\rho_i\,A_i}.$$

Scanned with OKEN Scanner

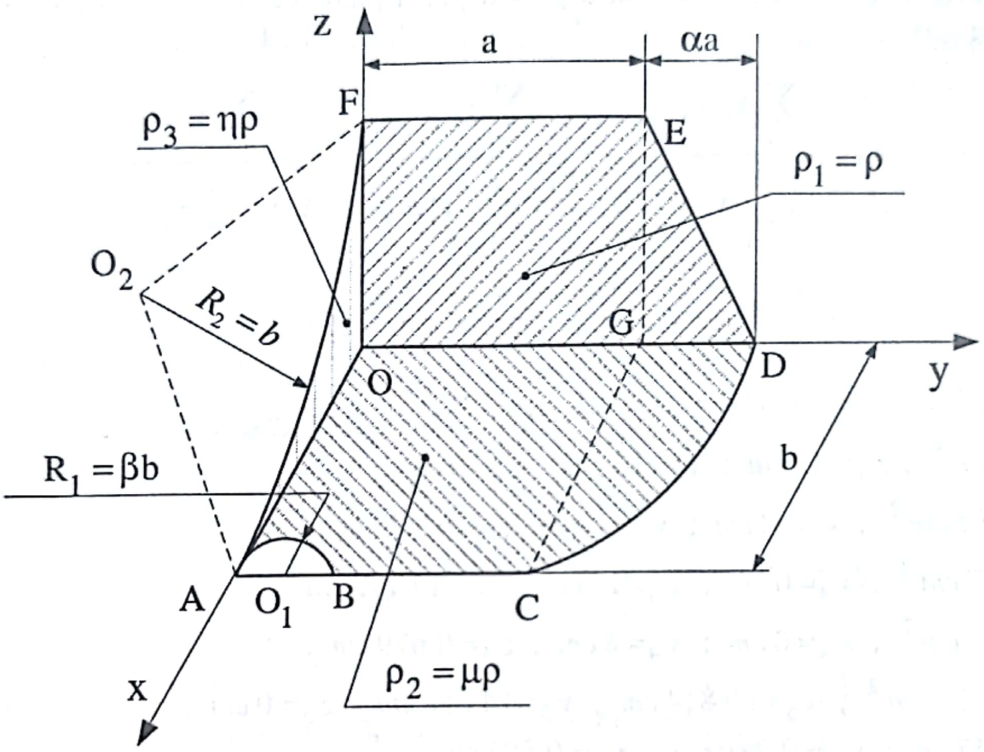


Figura II 2.

Scanned with OKEN Scanner

Tema nr. 3

Echilibrul sistemelor de solide rigide

III.1) Se consideră sistemul de bare articulate din figura III 1.1, acţionat de un sistem de forţe concentrate şi distribuite. Cunoscând lungimile $l_1 = 2 + 0{,}1 \cdot n$, $l_2 = 3{,}5 + 0{,}05 \cdot n$, $l_3 = 2{,}5 + 0{,}2 \cdot \left[\frac{n}{10}\right]$, unghiul $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot \left[\frac{n}{20}\right]$, forţele concentrate $P_1 = 1000 \cdot \left\{\frac{n}{4}\right\}$, $P_2 = 3000 \cdot \left\{\frac{n}{3}\right\}$, forţa uniform distribuită pe lungime $q = 2000 \cdot \left\{\frac{n}{5}\right\}$ şi cuplul $M = 6000 \cdot \left\{\frac{n}{6}\right\}$, să se determine reacţiunile din reazemele simple A şi B, articulaţiile C şi D şi încastrarea E.

Observaţii : i) $n \in N^*$ este o valoare impusă fiecărui student, [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x iar {x} partea sa fracţionară.
ii) Se vor folosi următoarele unităţi de măsură: m – pentru lungime, daN pentru forţe concentrate, daN / m pentru forţa distribuită şi $daN \cdot m$ pentru cuplu.

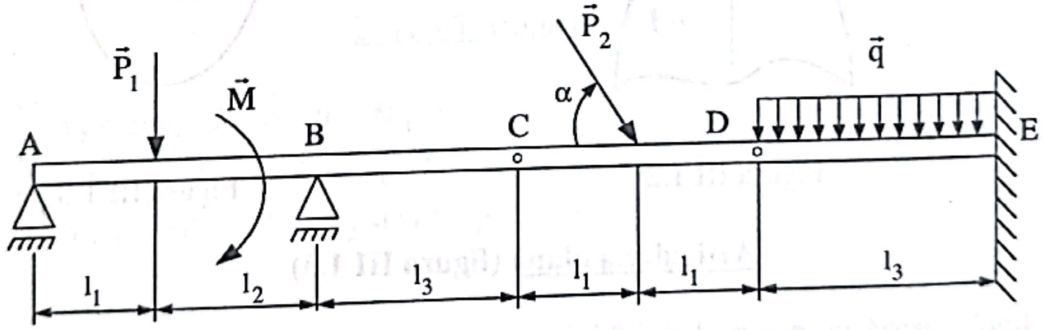


Figura III 1.1

Breviar teoretic:

Pentru rezolvarea unei probleme de echilibru a unui sistem de solide rigide se poate folosi *metoda izolării corpurilor*. Ea presupune parcurgerea următoarelor etape:

a) Se eliberează fiecare corp al sistemului de legăturile sale (exterioare sau interioare), înlocuind fiecare legătură cu reacţiunile corespunzătoare ei;

b) Se scriu ecuaţiile de echilibru şi, eventual, condiţiile de echilibru pentru fiecare rigid în parte;

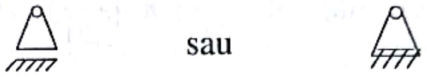
c) Se rezolvă sistemul de ecuaţii şi inecuaţii obţinut. Necunoscutele acestui sistem pot fi parametri ce definesc poziţia de echilibru (unghiuri, distanţe) şi / sau reacţiuni exterioare şi interioare sistemului de solide rigide.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru legăturile (fără frecare) existente în aplicaţia propusă forţele de legătură cu care acestea se înlocuiesc sunt:

Reazemul simplu (figura III 1.2)

Reazemul simplu obligă un punct O al solidului rigid (C) să rămână în permanenţă pe o suprafaţă sau pe o curbă dată. *Această legătură suprimă solidului rigid un grad de libertate şi poate fi înlocuită cu o reacţiune normală* $\vec{N}$ *dirijată după normala comună în punctul de contact.* Simbolul folosit pentru reazemul simplu este:



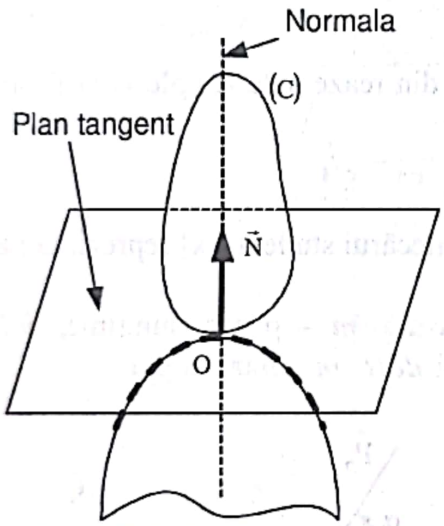


Figura III 1.2

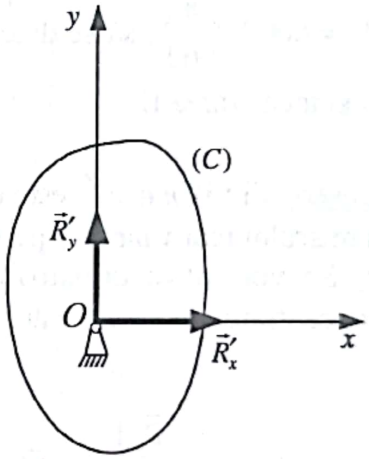


Figura III 1.3

<u>Articulaţia plană</u> (figura III 1.3)

Imobilizează un punct al rigidului. *Această legătură suprimă solidului rigid două grade de libertate şi poate fi înlocuită cu o reacţiune de direcţie necunoscută al cărui suport este situat în planul forţelor.* Componentele reacţiunii pe axele reperului Oxy (R'_x şi R'_y) se notează uneori cu H_O, respectiv V_O.

<u>Încastrarea plană</u> (figura III 1.4)

Este legătura prin care solidul rigid (C) este fixat (înţepenit) în alt corp astfel încât nu i se mai permite acestuia nici o deplasare. *În cazul forţelor plane încastrarea se înlocuieşte cu o reacţiune în planul forţelor şi cu un moment dirijat după normala pe planul forţelor.* Atât reacţiunea $\vec{R}$ cât şi momentul $\vec{M}'_O$ pot fi date prin proiecţiile lor (R'_x, R'_y, M'_O sau H_O, V_O, M'_O) pe axele unui sistem de coordonate cartezian.

Scanned with OKEN Scanner

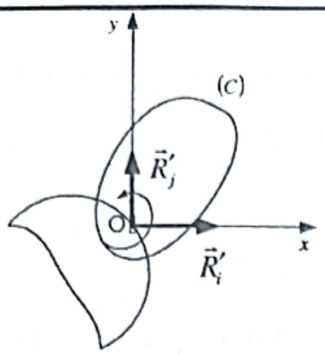


Figura III 1.4

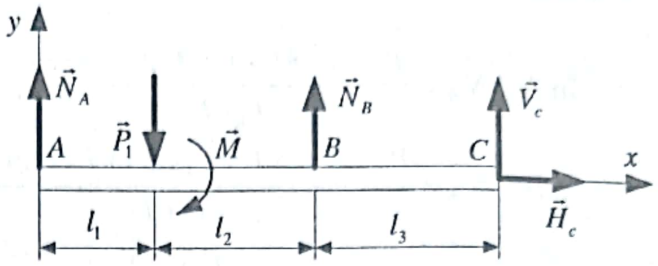


Figura III 1.5

Rezolvare:

Se izolează barele AC, CD şi DE şi se scriu ecuaţiile de echilibru:

Bara AC (figura III 1.5)

$$\sum X_i = H_C = 0 \tag{1}$$
$$\sum Y_i = N_A - P_1 + N_B + V_C = 0 \tag{2}$$
$$\sum M_{iC} = -N_A \cdot (l_1 + l_2 + l_3) + P_1 \cdot (l_2 + l_3) - N_B \cdot l_1 - M = 0 \tag{3}$$

Bara CD (figura III 1.6)

$$\sum X_i = H_D + P_2 \cos\alpha - H_C = 0 \tag{4}$$
$$\sum Y_i = V_D - P_2 \sin\alpha - V_C = 0 \tag{5}$$
$$\sum M_{iD} = -V_C \cdot 2l_1 - P_2 \sin\alpha \cdot l_1 = 0 \tag{6}$$

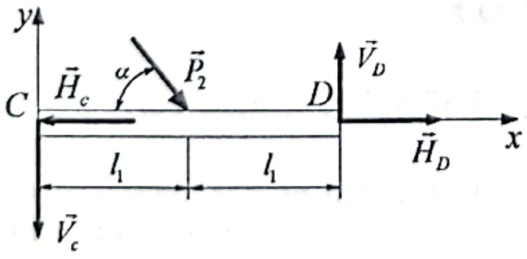


Figura III 1.6

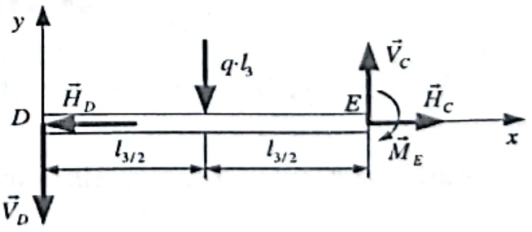


Figura III 1.7

Bara DE (figura III 1.7)

$$\sum X_i = H_E - H_D = 0 \tag{7}$$
$$\sum Y_i = -V_D - q \cdot l_3 + V_E = 0 \tag{8}$$
$$\sum M_{iE} = -V_D \cdot l_3 - q\, l_3 \cdot \frac{l_3}{2} + M_E = 0 \tag{9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (1- 9) obţinem:

În A : $N_A = \dfrac{P_1 l_2 - M - 0{,}5 P_2 l_3 \sin\alpha}{l_1 + l_2}$;

În B : $N_B = \dfrac{P_1 l_1 + 0{,}5 P_2 (l_1 + l_2 + l_3)\sin\alpha + M}{l_1 + l_2}$;

În C : $H_C = 0$; $V_C = -\dfrac{P_2}{2}\sin\alpha$;

În D : $H_D = -P_2 \cos\alpha$, $V_D = \dfrac{P_2}{2}\sin\alpha$;

În E : $H_E = -P_2 \cos\alpha$, $V_E = q l_3 + \dfrac{P_2}{2}\sin\alpha$, $M_E = \dfrac{q l_3^2}{2} + \dfrac{P_2 l_3}{2}\sin\alpha$.

Caz particular : n = 11

$l_1 = 3{,}1\,m$, $l_2 = 4{,}05\,m$, $l_3 = 2{,}7\,m$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

$P_1 = 750\,daN$, $P_2 = 2000\,daN$, $q = 400\,daN/m$; $M = 5000\,daN \cdot m$.

Rezultă:

$N_A = -541{,}495\,daN$; $N_B = 2000{,}513\,daN$, $H_C = 0\,daN$, $V_C = -707{,}106\,daN$
$H_D = -1414{,}212\,daN$, $V_D = 707{,}106\,daN$;
$H_E = -1414{,}212\,daN$, $V_E = 1787{,}106\,daN$, $M_E = 3367{,}188\,daN \cdot m$.

Scanned with OKEN Scanner

III.2) Se consideră sistemul de bare articulate din figura III 2, acţionat de un sistem de forţe concentrate şi distribuite. Cunoscând lungimile $l_1 = 1{,}5 + 0{,}2 \cdot \left[\frac{n}{5}\right]$, $l_2 = 2 + 0{,}1 \cdot \left[\frac{n}{3}\right]$, $l_3 = 2{,}5 + 0{,}3 \cdot \left[\frac{n}{15}\right]$, unghiurile $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \cdot \left[\frac{n}{8}\right]$, $\beta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{32} \cdot \left[\frac{n}{20}\right]$, forţele concentrate $P_1 = 2000 \cdot \left\{\frac{n}{5}\right\}$, $P_2 = 3000 \cdot \left\{\frac{n}{6}\right\}$, $P_3 = 7000 \cdot \left\{\frac{n}{7}\right\}$, forţa uniform distribuită pe lungime $q = 2500 \cdot \left\{\frac{n}{10}\right\}$ şi cuplul $M = 10000 \cdot \left\{\frac{n}{5}\right\}$, să se determine reacţiunile din reazemele simple A, C şi D şi articulaţiile B, E şi F.

Observaţie: A se parcurge breviarul teoretic prezentat la rezolvarea problemei precedente. Observaţiile din enunţul problemei III.1 rămân valabile şi în acest caz.

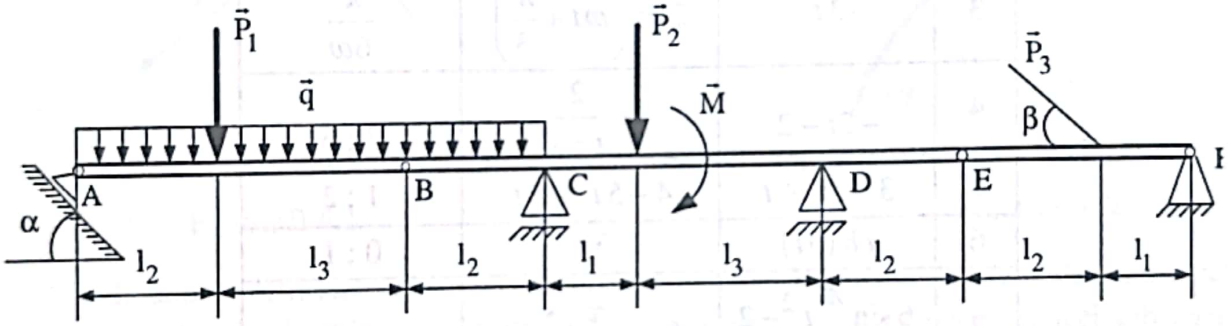


Figura III.2

Tema nr. 4

Cinematica mişcării absolute a punctului material

IV.1) În tabelul T 3 se dau ecuaţiile parametrice ale mişcării unui punct material în coordonate carteziene:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

Se cere:

a) Să se determine şi să se reprezinte traiectoria punctului;
b) Să se determine componentele vitezei şi acceleraţiei punctului la un moment de timp arbitrar
precum şi modulele lor;
c) Să se determine raza de curbură a traiectoriei şi componentele acceleraţiei în coordonate intrinseci la momentul de timp t_0 indicat.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul T3

Nr. var.	$x = x(t)$ (m)	$y = y(t)$ (m)	$t_0(s)$
0	$2\cos\frac{\pi}{4}t$	$5\sin\frac{\pi}{4}t+3$	1 ; 2
1	$-2t^2+3$	$-5t$	0,5 ; 1
2	$4\cos^2\frac{\pi}{3}t+2$	$4\sin^2\frac{\pi}{3}t$	1 ; 3
3	$3t$	$2\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{6\omega}$
4	$-2t-2$	$-\frac{2}{t+1}$	3 ; 6
5	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+5t$	1 ; 2
6	$ch(6t)$	$3t$	0 ; 1
7	$6\sin\frac{\pi}{6}t^2-2$	$6\cos\frac{\pi}{6}t^2+3$	0 ; 2
8	$-4/t+1$	$4t+4$	0 ; 2
9	$2-3t-6t^2$	$3-\frac{3}{2}t-3t^2$	1 ; 4
10	$-4\cos\frac{\pi}{3}t-1$	$-4\sin\frac{\pi}{3}t$	1 ; 3
11	$7t^2-3$	5 t	0,2 ; 2
12	$7\sin^2\frac{\pi}{6}t-5$	$-7\cos^2\frac{\pi}{6}t$	1 ; 2
13	$-4t$	$3t^2+2$	2 ; 4
14	$3/t+2$	3t + 6	1 ; 3
15	$-4t^2+1$	- 3 t	0 ; 2

Scanned with OKEN Scanner

Breviar teoretic:

B 1. Noţiuni fundamentale

Mişcarea unui punct material M este cunoscută dacă în orice moment de timp se poate preciza poziţia lui în raport cu un sistem de referinţă fix. Poziţia punctului material poate fi dată:

1) prin vectorul de poziţie $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (vezi figura B 4.1) ;
2) prin curba (C) pe care se mişcă punctul material şi legea orară a mişcării $s = s(t)$ (vezi figura B 4.2) ;

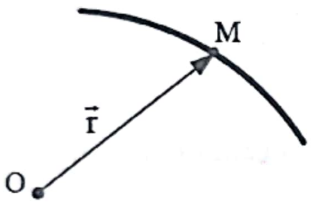


Figura B 4.1

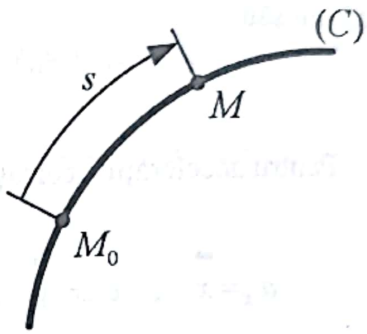


Figura B 4.2

Ecuaţia vectorială $\vec{r} = \vec{r}(t)$ se proiectează pe axele unui sistem de coordonate convenabil ales fiind echivalentă cu trei ecuaţii scalare ce se exprimă de obicei sub formă parametrică (vezi B 2). Parametrul cel mai utilizat pentru descrierea mişcării este timpul t.

Traiectoria este, prin definiţie, *locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de punctul material în mişcarea sa.* Ea se obţine eliminând parametrul între ecuaţiile parametrice.

Viteza instantanee (la un moment dat) se defineşte prin:

$$\vec{v} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \overset{not}{=} \dot{\vec{r}} \tag{4.1}$$

Viteza $\vec{v}$ este un vector tangent la traiectorie şi are sensul mişcării pe traiectorie. Se exprimă în m/s.

Acceleraţia instantanee (la un moment dat) se defineşte prin:

$$\vec{a} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \overset{not}{=} \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \tag{4.2}$$

Acceleraţia $\vec{a}$ este un vector îndreptat spre interiorul (concavitatea) curbei ce reprezintă traiectoria. Se exprimă în m/s^2.

Scanned with OKEN Scanner

B 2. Studiul mişcării punctului material în diferite sisteme de coordonate

B 2.1. Sistemul de coordonate carteziene (figura B 4.3)

Vectorul de poziţie are expresia $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, astfel încât ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sunt:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \tag{4.3}$$

Proiecţiile vitezei pe axele acestui sistem de coordonate sunt:

$$v_x = \dot{x} \quad , \quad v_y = \dot{y} \quad , \quad v_z = \dot{z} \tag{4.4}$$

iar modulul său:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2} \tag{4.5}$$

Pentru acceleraţie aceleaşi mărimi sunt:

$$a_x = \ddot{x} \quad , \quad a_y = \ddot{y} \quad , \quad a_z = \ddot{z} \quad , \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\ddot{x}\right)^2 + \left(\ddot{y}\right)^2 + \left(\ddot{z}\right)^2} \tag{4.6}$$

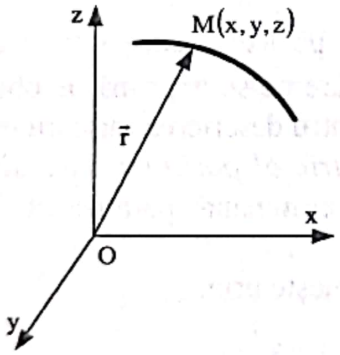


Figura B 4.3

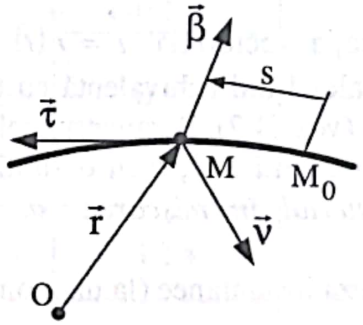


Figura B 4.4

B 2.2. Sistemul de coordonate Frenet (figura B 4.4)

Sistemul de coordonate Frenet (naturale, intrinseci) este un sistem de referinţă mobil având originea în punctul M (care efectuează mişcarea) şi axele:

- tangenta la traiectorie (de versor $\vec{\tau}$) ;
- normala principală (de versor $\vec{\nu}$) ;
- binormala (de versor $\vec{\beta}$).

Mişcarea punctului este cunoscuta cu ajutorul *legii orare s = s(t).*

Componentele vitezei şi acceleraţiei pe axele triedrului Frenet sunt:

Scanned with OKEN Scanner

$$v_\tau = \dot{s} \quad , \quad v_\nu = 0 \quad , \quad v_\beta = 0 \tag{4.7}$$

$$a_\tau = \ddot{s} \quad , \quad a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \quad , \quad a_\beta = 0 \tag{4.8}$$

iar modulele lor:

$$\left|\vec{v}\right| = \dot{s} \quad , \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\ddot{s}\right)^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2} \tag{4.9}$$

Rezolvare : Varianta nr. 0

$$x(t) = 2\cos\frac{\pi}{4}t \quad , \quad y(t) = 5\sin\frac{\pi}{4}t + 3 \quad , \quad t_0' = 1\,s, t_0'' = 2\,s$$

a) Eliminând timpul între cele două ecuaţii parametrice obţinem ecuaţia traiectoriei:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$

care este ecuaţia unei elipse cu axele paralele cu Ox şi Oy, centrul în A(0, 3) şi de semiaxe 2 şi 5 (figura IV 1.1). Mobilul pleacă din punctul B(2, 3) şi parcurge elipsa în sens trigonometric.

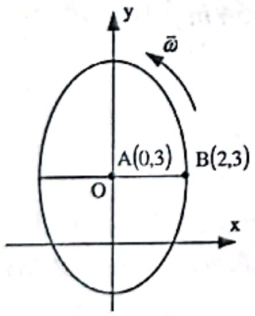


Figura IV 1.1

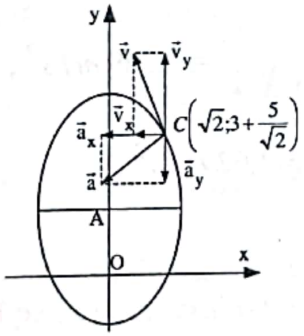


Figura IV 1.2

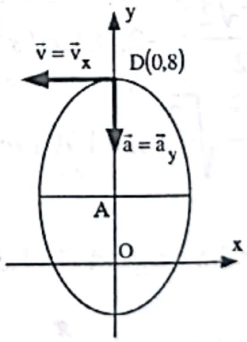


Figura IV 1.3

b) Componentele vitezei şi acceleraţiei în sistemul de coordonate carteziene sunt:

$$v_x = \dot{x} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}t \quad , \quad v_y = \dot{y} = \frac{5\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}t$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{\pi^2}{8}\cos\frac{\pi}{4}t \quad , \quad a_y = \ddot{y} = -\frac{5\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4}t$$

iar modulele lor:

$$v = \frac{\pi}{4}\sqrt{4 + 21\cos^2\frac{\pi}{4}t} \quad , \quad a = \frac{\pi^2}{16}\sqrt{4 + 21\sin^2\frac{\pi}{4}t}\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) La un moment arbitrar de timp acceleraţia tangenţială este dată de relaţia:

$$a_\tau = \dot{v} = -\frac{21\pi^2}{16}\frac{\sin\frac{\pi}{4}t\cos\frac{\pi}{4}t}{\sqrt{4+21\cos^2\frac{\pi}{4}t}}$$

Pentru determinarea razei de curbură putem observa că:

$$a_\nu = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_\nu} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}}$$

În fine, componenta normală a acceleraţiei este dată de relaţia: $a_\nu = \frac{v^2}{\rho}$.

Momente particulare de timp:

$t_0' = 1\,s$ (figura IV 1.2)

$x = \sqrt{2} \cong 1{,}414$ m, $y = \frac{5\sqrt{2}}{2} + 3 \cong 6{,}535$ m, $v_x = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cong 1{,}111$ m/s,

$v_y = \frac{5\pi\sqrt{2}}{8} \cong 2{,}766$ m/s, $v = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{29}{2}} \cong 2{,}990$ m/s, $a_x = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} \cong 0{,}872\,m/s^2$,

$a_y = -\frac{5\pi^2\sqrt{2}}{32} \cong -2{,}181\,m/s^2$, $a = \frac{\pi^2}{16}\sqrt{\frac{29}{2}} \cong 2{,}349\,m/s^2$, $\rho = 5{,}554\,m$,

$a_\tau = -\frac{21\pi^2}{32}\sqrt{\frac{2}{29}} \cong -1{,}701\,m/s^2$, $a_\nu = 1{,}62\,m/s^2$.

$t_0'' = 2\,s$ (figura IV 1.3)

$x = 0\,m$, $y = 8\,m$, $v_x = -\frac{\pi}{2} \cong -1{,}571\,m/s$, $v_y = 0\,m/s$, $v = 1{,}571\,m/s$, $a_x = 0\,m/s^2$,

$a_y = -\frac{5\pi^2}{16} \cong -3{,}084\,m/s^2$, $a = 3{,}084\,m/s^2$, $a_\tau = 0\,m/s^2$, $\rho = 0{,}8\,m$, $a_\nu = 3{,}084\,m/s^2$.

IV.2) Se consideră mecanismul din figura IV 2, format din culisele A şi B legate prin tija ABM. Tija este antrenată prin manivela OC. Ştiind că:

$$OC = AC = BC = 20 + 0{,}1\cdot\left[\frac{n}{3}\right],\ AM = 10 + 0{,}2\cdot\left[\frac{n}{4}\right],\ \varphi = \left(5t^2 + 6\left[\frac{n}{10}\right]t\right)\frac{\pi}{180},$$

să se determine vitezele şi acceleraţiile punctelor A, B şi M pentru momentul de timp $t_0 = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii: I) Se vor folosi următoarele unităţi de măsură: *cm* – pentru lungime, *radiani* – pentru unghiuri şi *secunde* – pentru timp.
ii) [x] simbolizează partea întreagă a numărului real *x*.

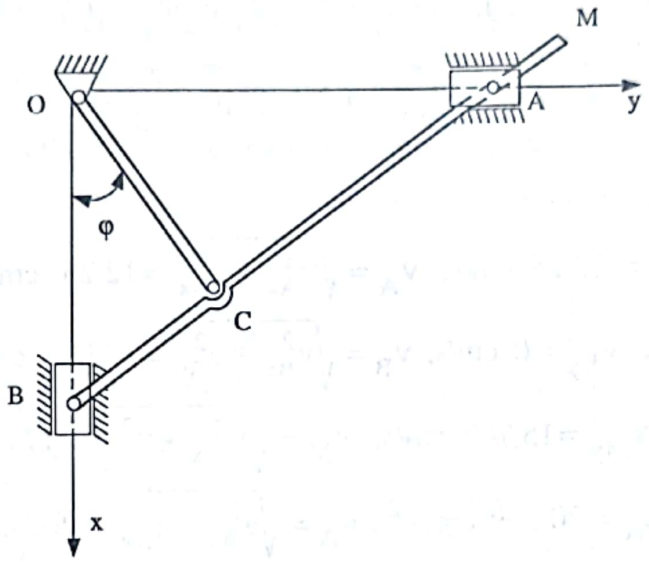


Figura IV 2.

Rezolvare:

Mecanismul se raportează la sistemul de coordonate carteziene Oxy. Coordonatele punctelor A, B şi M sunt:

$$x_A=0 \quad , \quad y_A=2\,OC\sin\varphi \quad , \quad x_B=2\,OC\cos\varphi \quad , \quad y_B=0$$

$$x_M=-AM\cos\varphi \quad , \quad y_M=(2\,OC+AM)\sin\varphi$$

Derivând succesiv de două ori în raport cu timpul obţinem vitezele, respectiv acceleraţiile punctelor A, B şi M pe axele reperului Oxy:

$$v_{Ax}=0 \quad , \quad v_{Ay}=2OC\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \quad , \quad v_{Bx}=-2OC\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \quad , \quad v_{By}=0 \ ,$$

$$v_{Mx}=AM\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \quad , \quad v_{My}=(2OC+AM)\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \ ,$$

$$a_{Ax}=0 \quad , \quad a_{Ay}=2\,OC\left(-\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^{\,2}+\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi}\right) ,$$

$$a_{Bx}=2\,OC\left(-\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^{\,2}-\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}\right) \quad , \quad a_{By}=0 \ ,$$

$$a_{Mx}=AM\left(\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^{\,2}+\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}\right), \ a_{My}=(2\,OC+AM)\left(-\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^{\,2}+\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Caz particular : n = 40

$$OC = AC = BC = 21{,}3\,cm\ ,\quad AM = 12\,cm\,,\ \varphi = \left(5t^{\,2} + 24\,t\right)\frac{\pi}{180}\,rad\,,$$

$$\dot{\varphi} = (5t + 12)\frac{\pi}{90}\,rad/s\quad ,\quad \ddot{\varphi} = \frac{\pi}{18}\,rad/s^{\,2}\,.$$

Pentru $t_0 = 2\,s$ se obţine:

$v_{Ax} = 0$ cm/s, $v_{Ay} = 12{,}25$ cm/s, $v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ax}^2} = 12{,}25$ cm/s

$v_{Bx} = -15{,}166$ cm/s, $v_{By} = 0$ cm/s, $v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 15{,}166$ cm/s

$v_{Mx} = 8{,}544$ cm/s, $v_{My} = 15{,}707$ cm/s, $v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = 17{,}880$ cm/s

$a_{Ax} = 0\ cm/s^2$, $a_{Ax} = -20{,}509\ cm/s^2$, $a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = 20{,}509\ cm/s^2$

$a_{Bx} = -16{,}305\ cm/s^2$, $a_{By} = 0\ cm/s^2$, $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 16{,}305\ cm/s^2$

$a_{Mx} = 4{,}593\ cm/s^2$, $a_{My} = -17{,}793\ cm/s^2$, $a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 18{,}377\ cm/s^2$

Scanned with OKEN Scanner

Tema nr. 5

Cinematica mişcării absolute a solidului rigid

V 1) Se consideră sistemul de corpuri din figura V 1.1, pentru care se dau distanţele $O_1A = AB = BC = BD = DE = EF = l, CD = l_1$ şi unghiurile α şi β. Ştiind că manivela O_1A se roteşte cu viteza unghiulară ω, să se determine vitezele punctelor A, B, C, E şi F.

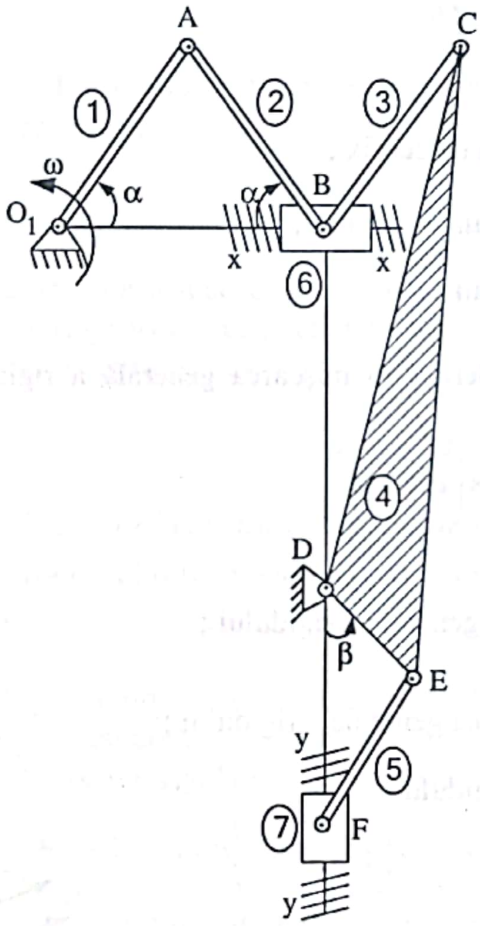


Figura V 1.1

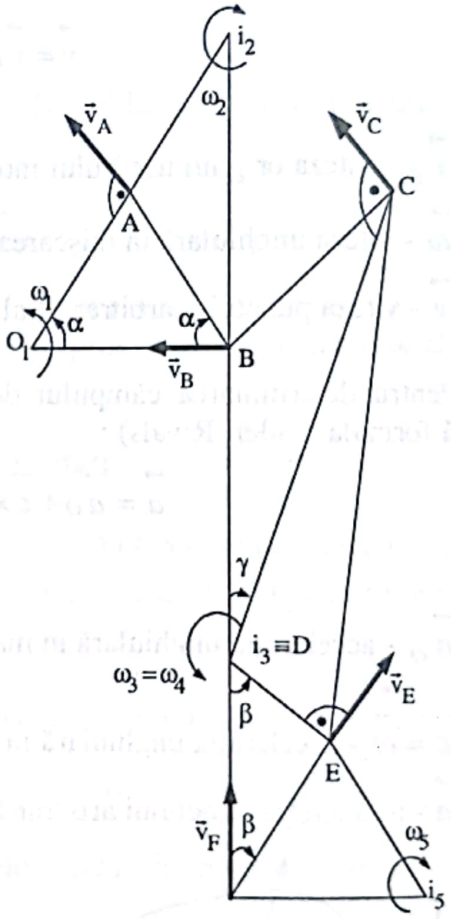


Figura V 1.2

Breviar teoretic :

B 1. Distribuţia de viteze şi acceleraţii în mişcarea generală a rigidului. Relaţiile lui Euler.

Mişcarea solidului rigid este determinată atunci când sunt cunoscute expresiile generale ca funcţie de timp pentru vectorul de poziţie, viteza şi acceleraţia unui punct oarecare M al rigidului, în raport cu un reper considerat fix (figura B 5.1).

Scanned with OKEN Scanner

Notând cu $\vec{r}_1$ vectorul de poziţie al unui punct al rigidului faţă de sistemul fix $O_1x_1y_1z_1$, cu $\vec{r}$ vectorul de poziţie al punctului faţă de reperul mobil Oxyz, solidar legat de corpul aflat în mişcare şi cu $\vec{r}_O$ vectorul de poziţie al originii sistemului mobil faţă de originea sistemului fix, putem scrie :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_O + \vec{r} \tag{5.1}$$

Formula (Euler, Resal) care dă distribuţia de viteze în mişcarea generală a rigidului este :

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{5.2}$$

unde :

$\vec{v}_O$ - viteza originii triedrului mobil faţă de cel fix ;

$\vec{\omega}$ - viteza unghiulară în mişcarea generală a rigidului;

$\vec{v}$ - viteza punctului arbitrar M al rigidului.

Pentru determinarea câmpului de acceleraţii în mişcarea generală a rigidului se utilizează formula (Euler, Rivals) :

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) \tag{5.3}$$

unde :

$\vec{a}_O$ - acceleraţia unghiulară în mişcarea generală a rigidului ;

$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ - acceleraţia unghiulară în mişcarea generală a rigidului ;

$\vec{a}$ - acceleraţia punctului arbitrar M al rigidului.

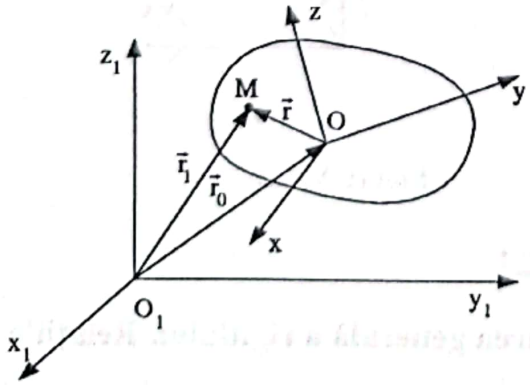


Figura B 5.1

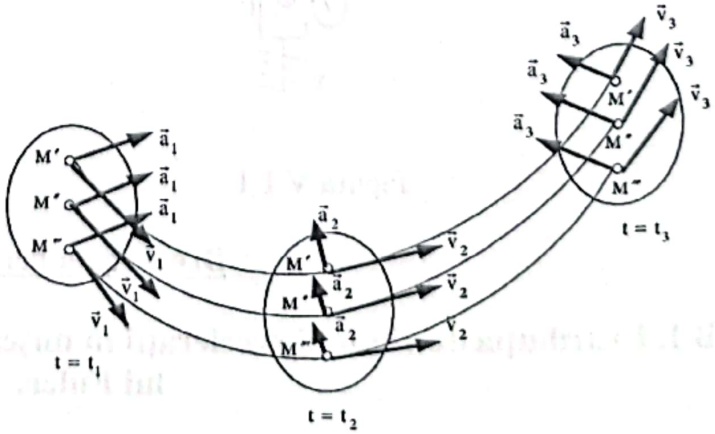


Figura B 5.2

Scanned with OKEN Scanner

B2. Mişcări particulare ale rigidului

B 2.1. Mişcarea de translaţie

Un rigid efectuează o mişcare de translaţie atunci când orice dreaptă a acestuia rămâne paralelă cu ea însăşi (cu o direcţie fixă) în tot timpul mişcării.

Proprietăţi : 1) În mişcarea de translaţie vectorii viteza unghiulară şi acceleraţie unghiulară sunt nuli :

$$\vec{\omega} = \vec{\varepsilon} = \vec{0} \tag{5.4}$$

2) La un moment dat de timp toate punctele rigidului au aceiaşi viteză şi aceiaşi acceleraţie :

$$\vec{v} = \vec{v}_O \quad , \quad \vec{a} = \vec{a}_O \tag{5.5}$$

adică vectorii viteză şi acceleraţie sunt vectori liberi (figura B 5.2).

3) Traiectoriile diferitelor puncte se suprapun prin operaţia geometrică elementară de translaţie (figura B 5.2).

B 2.2. Mişcarea de rotaţie

Un rigid efectuează o mişcare de rotaţie dacă două puncte ale sale, O_1 şi O_2, şi prin urmare o axă a sa, rămân fixe în timpul mişcării. Axa fixă $O_1 O_2 \equiv \Delta$ se numeşte *axă de rotaţie.*

Proprietăţi : 1) Traiectoriile diferitelor puncte ale rigidului sunt cercuri conţinute în plane perpendiculare pe axa de rotaţie (figura B 5.3).

2) Poziţia rigidului la un moment dat poate fi complet precizată cu ajutorul unghiului $\theta = \theta(t) = mas\left(Ox, \hat{O}_1 x_1\right)$, astfel încât un solid rigid în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe are un singur grad de libertate.

3) Distribuţia de viteze este dată de relaţia :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{5.6}$$

vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ fiind dirijat în lungul axei de rotaţie (figura B 5.3).

Folosind proiecţiile vitezei pe axele sistemului mobil Oxyz se pot trage următoarele concluzii:

a) Punctele aparţinând axei de rotaţie au viteză nulă (sunt singurele puncte care au această proprietate) ;

Scanned with OKEN Scanner

b) Vitezele punctelor situate pe o dreaptă perpendiculară pe axa de rotaţie sunt perpendiculare pe această dreaptă, modulele lor fiind direct proporţionale cu distanţa de la punct la axa de rotaţie ;

c) Punctele situate pe o paralelă la axa de rotaţie au aceiaşi viteză.

Aceste proprietăţi sunt evidenţiate şi în figura B 5.4.

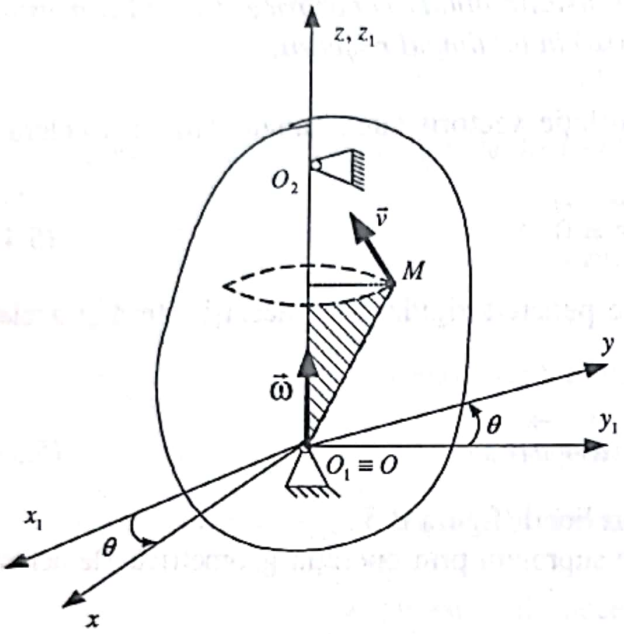


Figura B 5.3

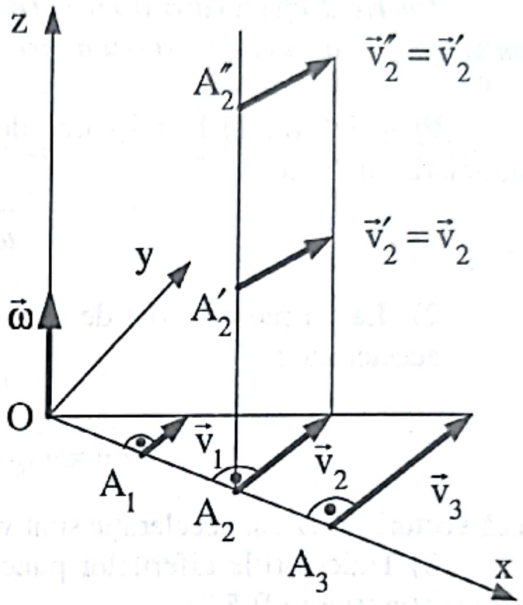


Figura B 5.4

4) Distribuţia de acceleraţii este dată de relaţia :

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) \tag{5.7}$$

Proprietăţile câmpului de acceleraţii sunt analoage cu cele ale câmpului de viteze cu singura deosebire că acceleraţiile sunt înclinate faţă de o dreaptă perpendiculară pe axa de rotaţie cu acelaşi unghi φ dat de relaţia $tg\,\varphi = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.

B 2.3. Mişcarea plan – paralelă

Un rigid efectuează o mişcare plan – paralelă atunci când trei puncte necoliniare ale sale (adică un plan P al său) rămân tot timpul mişcării conţinute într-un plan fix P_1 din spaţiu (figura B 5.5).

Proprietăţi : 1) Distribuţia de viteze şi acceleraţii în plane paralele cu planul fix P_1 este aceiaşi astfel încât studiul mişcării punctelor unui rigid poate fi redus la studiul mişcării punctelor din planul P (traiectoriile, vitezele şi acceleraţiile punctelor aflate pe o dreaptă perpendiculară pe planul P sunt identice).

2) Poziţia rigidului la un moment dat este determinată de vectorul de poziţie $\vec{r}_O(t) = x_O(t)\,\vec{i}_1 + y_O(t)\,\vec{j}_1$ şi de unghiul $\theta(t)$ făcut de axele Ox şi O_1x_1, astfel încât în mişcarea plan – paralelă un rigid are trei grade de libertate.

Scanned with OKEN Scanner

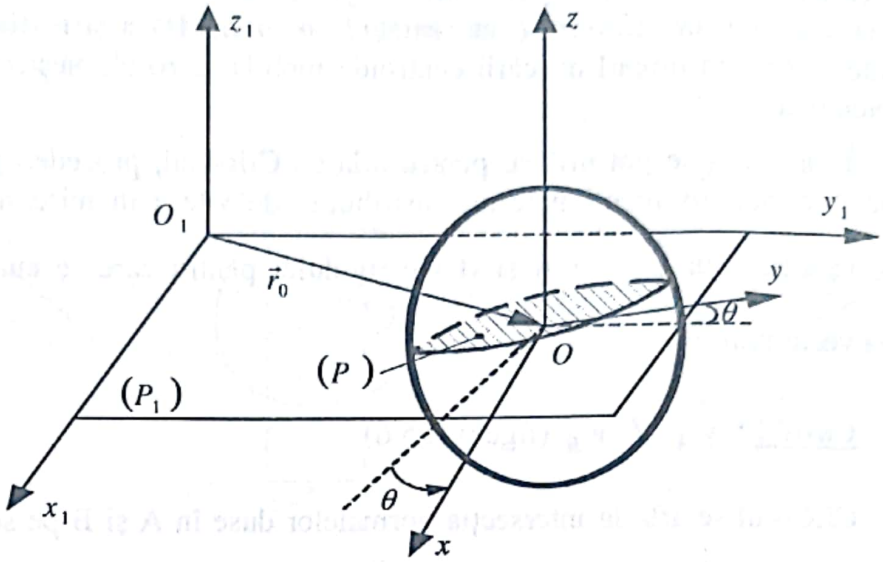


Figura B 5.5

3) Vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$ sunt coliniari, fiind dirijaţi în lungul axei Oz, perpendiculară pe planul P:

$$\vec{\omega}=\omega\vec{k} \quad , \quad \vec{\varepsilon}=\varepsilon\vec{k} \tag{5.8}$$

unde $\omega=\dot{\theta}, \varepsilon=\ddot{\theta}$ iar vectorii $\vec{v}_O$ şi $\vec{a}_O$ sunt conţinuţi în planul P :

$$\vec{v}_O=v_{Ox}\vec{i}+v_{Oy}\vec{j} \quad , \quad \vec{a}_O=a_{Ox}\vec{i}+a_{Oy}\vec{j} \tag{5.9}$$

unde $v_{Ox}=\dot{x}_O, a_{Ox}=\ddot{x}_O, v_{Oy}=\dot{y}_O, a_{Oy}=\ddot{y}_O$.

4) Componentele vitezei unui punct arbitrar M(x, y, z) pe axele sistemului mobil sunt :

$$v_x=v_{Ox}-\omega y \quad , \quad v_y=v_{Oy}+\omega x \quad , \quad v_z=0 \tag{5.10}$$

Studiul relaţiilor (5.10) permite formularea următoarelor concluzii :

a) Punctele de viteză nulă aparţin unei drepte paralele cu Oz, variabilă în timp, de ecuaţii parametrice:

$$\xi=-\frac{v_{Oy}}{\omega} \quad , \quad \eta=\frac{v_{Ox}}{\omega} \quad , \quad \zeta=\text{arbitrar} \tag{5.11}$$

numită *axă instantanee de rotaţie.* Punctul $I(\xi,\eta)$ de intersecţie între planul P şi axa instantanee de rotaţie se numeşte *centru instantaneu de rotaţie* (notat **CIR**).

b) Distribuţia de viteze în mişcarea plan-paralelă este identică cu cea de la mişcarea de rotaţie, ca şi când solidul s-ar roti în jurul axei instantanee de rotaţie cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$.

Scanned with OKEN Scanner

Locul geometric al centrului instantaneu de rotaţie I faţă de sistemul de referinţă fix este o curbă fixă numită *bază* (sau *centroidă fixă*) iar faţă de sistemul de referinţă mobil este o curbă numită *rostogolitoare* (sau *centroidă mobilă*). Baza şi rostogolitoarea sunt curbe tangente în I iar în timpul mişcării centroida mobilă se rostogoleşte fără să alunece peste centroida fixă.

În aplicaţii se pot utiliza, pentru aflarea CIR-ului, procedee geometrice bazate pe proprietăţile mai sus menţionate ale distribuţiei de viteze în mişcarea plan-paralelă. Fie, pentru aceasta, două puncte A şi B ale rigidului pentru care se cunosc vectorul $\vec{v}_A$ şi direcţia vectorului $\vec{v}_B$.

<u>Cazul I</u> : $\vec{v}_A \not\parallel \vec{v}_B$ (figura B 5.6)

CIR – ul se află la intersecţia normalelor duse în A şi B pe suporturile celor două viteze. Cunoscând v_A se determină $\omega = \frac{v_A}{IA}$ şi apoi viteza oricărui punct al rigidului. De exemplu : $v_B = \omega \cdot IB = v_A \cdot \frac{IB}{IA}$.

<u>Cazul II</u> : $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$

Subcazul II.1 : $AB \perp \vec{v}_A$ (figura B 5.7)

CIR – ul se află la infinit, distribuţia de viteze fiind ca la mişcarea de translaţie (adică toate punctele au aceiaşi viteză) : $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ = constant.

Subcazul II.2 : $AB \perp \vec{v}_A$ (figura B 5.8)

Pentru aflarea CIR – ului trebuie cunoscut în întregime şi vectorul $\vec{v}_B$. Folosind proprietatea de variaţie liniară a vitezelor în lungul razei din cazul mişcării de rotaţie, CIR-ul I se găseşte la intersecţia dreptei AB cu dreapta ce uneşte extremităţile vectorilor viteză $\vec{v}_A$ şi $\vec{v}_B$.

5) Componentele pe axele sistemului mobil Oxyz ale acceleraţiei unui punct arbitrar M(x,y,z) sunt :

$$a_x = a_{Ox} - \varepsilon y - \omega^2 x \quad , \quad a_y = a_{Oy} + \varepsilon x - \omega^2 y \quad , \quad a_z = 0 \qquad (5.12)$$

Studiul acestor proiecţii permite formularea următoarelor concluzii :

a) Există puncte în care acceleraţia este nulă. Ele sunt situate pe o paralelă la axa Oz a cărei intersecţie cu planul mobil P este un punct J, numit *polul acceleraţiilor*, având coordonatele (variabile în timp):

$$\xi' = \frac{\omega^2 a_{Ox} - \varepsilon a_{Oy}}{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad , \quad \eta' = \frac{\omega^2 a_{Oy} + \varepsilon a_{Ox}}{\omega^4 + \varepsilon^2} \qquad (5.13)$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Distribuţia de acceleraţii în mişcarea plan-paralelă este identică cu cea din mişcarea de rotaţie, ca şi când rigidul s-ar roti în jurul unei axe normale pe planul fix şi care trece prin polul acceleraţiilor J.

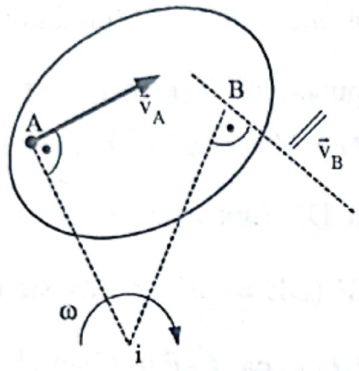


Figura B 5.6

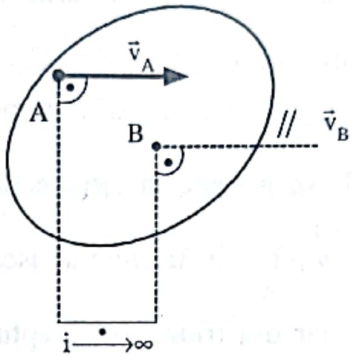


Figura B 5.7

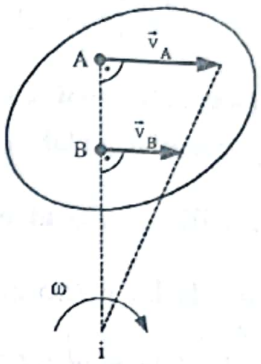


Figura B 5.8

Rezolvare:

Cele şapte corpuri ale sistemului au următoarele mişcări:
Corpul 1 – mişcare de rotaţie;
Corpul 2 – mişcare plan – paralelă;
Corpul 3 – mişcare plan – paralelă;
Corpul 4 – mişcare de rotaţie;
Corpul 5 – mişcare plan – paralelă;
Corpul 6 – mişcare de translaţie;
Corpul 7 – mişcare de translaţie.

Punctul A, considerat ca punct al manivelei O_1A, execută o mişcare circulară pe un cerc cu centrul în O_1 şi de rază $O_1A=l$, cu viteza $\vec{v}_A$ normală pe O_1A, având sensul vitezei unghiulare $\vec{\omega}$ (trigonometric) şi modulul $v_A=O_1A\cdot\omega=l\omega$.

CIR- ul barei AB se găseşte la intersecţia verticalei în B cu dreapta O_1A (vezi figura R 9.7.2). Viteza unghiulară $\vec{\omega}_2$, în mişcarea plan-paralelă a acestei bare, are sensul orar iar modulul $\omega_2=\frac{v_A}{I_2A}=\omega$, deoarece $I_2A=O_1A=l$.

Viteza punctului B (ca şi viteza oricărui punct al corpului 6) este un vector perpendicular pe I_2B, orientat spre stânga, şi are modulul $v_B=I_2B\cdot\omega_2=2l\omega\sin\alpha$.

Viteza punctului C, considerat ca punct al plăcii triunghiulare CDE, este un vector perpendicular pe raza CD astfel încât CIR- ul I_3 al barei BC va fi la intersecţia dreptei CD

Scanned with OKEN Scanner

cu normala în B pe O_1B, adică $I_3 \equiv D$. Viteza unghiulară $\vec{\omega}_3$, din mişcarea plan-paralelă a barei BC, este determinată ca sens şi modul de viteza punctului B. Se obţine:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{BD} = 2\omega \sin\alpha \quad , \quad v_C = CD \cdot \omega_3 = 2l_1 \omega \sin\alpha$$

Rotaţia plăcii triunghiulare CDE va fi caracterizată de vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}_4 = \vec{\omega}_3$, obţinut cu ajutorul vitezei punctului C. Viteza punctului E este un vector perpendicular pe DE, cu sensul din figura R 9.7.2 şi modulul $v_E = DE \cdot \omega_4 = 2l\omega \sin\alpha$. În fine, CIR- ul I_5 al barei EF se găseşte la intersecţia dreptei DE (normală pe $\vec{v}_E$) cu orizontala lui F (normală pe $\vec{v}_F$). Din triunghiul isoscel DEF (DE = EF) se găseşte că $mas\left(\hat{EDF}\right) = mas\left(\hat{DFE}\right) = \beta$ iar din triunghiul dreptunghic DFI_5 ca $I_5F = 2l\sin\beta$ şi $I_5E = l$. Vectorul $\vec{v}_E$ determină sensul vitezei unghiulare $\vec{\omega}_5$ (orar) şi modulul acesteia: $\omega_5 = \frac{v_E}{I_5E} = 2\omega\sin\alpha$. Viteza punctului F (ca şi viteza oricărui punct al corpului 7) este un vector perpendicular pe I_5F (// yy', orientat spre B) şi are modulul $v_F = I_5F \cdot \omega_5 = 4l\omega \sin\alpha \sin\beta$.

V 2) Se consideră mecanismul din figura V 2, la care manivela OA se roteşte cu viteza unghiulară $\omega_0 = 1 + \left\{\frac{n}{20}\right\}$ rad/s. Să se determine vitezele punctelor A, B, C şi D şi vitezele unghiulare ale elementelor mecanismului. Se cunosc:

$$OA = 15 + 3\cdot\left[\frac{n}{10}\right] \text{ cm}, \; AD = 30 + 2\cdot\left[\frac{n}{5}\right] \text{ cm}, \; BC = 40 + \left[\frac{n}{3}\right] \text{ cm}, \; \text{BD} = \text{B}O_1.$$

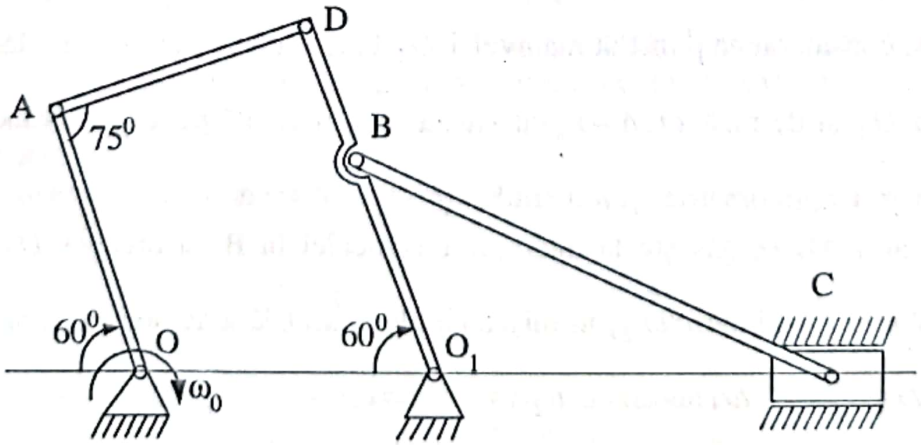


Figura V 2.

Scanned with OKEN Scanner

Tema nr. 6

Cinematica mişcării relative a punctului material

VI 1) Placa triunghiulară OAB se roteşte în jurul laturii OB după legea $\varphi(t)=0{,}9\,t^2-9\,t^3$ (rad). Pe latura OA se deplasează un mobil M după legea $s(t)=OM=16-8\cos(3\pi t)$ (cm)

Să se determine viteza şi acceleraţia absolută a punctului M după $t_1=\frac{2}{9}\,s$ (figura VI 1.1).

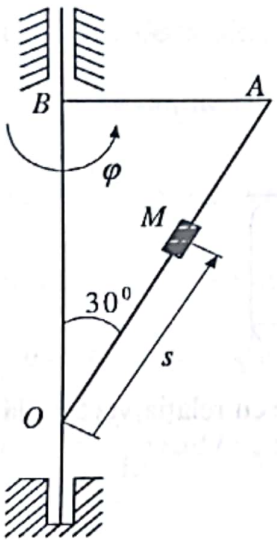


Figura VI 1.1

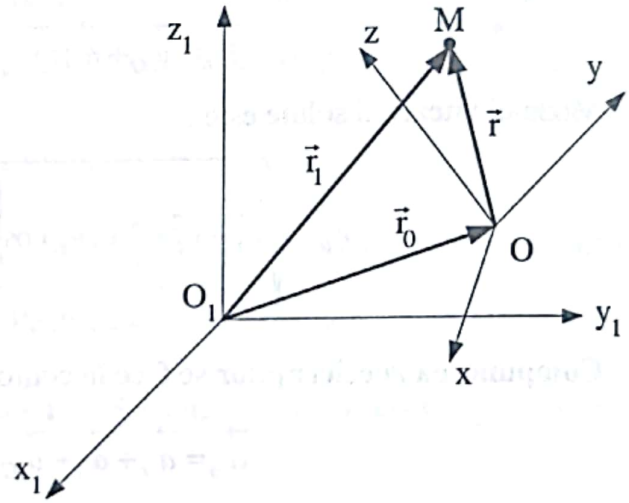


Figura B 6.1

Breviar teoretic:

Se consideră un sistem de referinţă fix $O_1x_1y_1z_1$, un sistem de referinţă mobil *Oxyz* care execută o mişcare oarecare faţă de sistemul fix şi un punct M care se află, la rândul său, în mişcare faţă de cele două sisteme de referinţă considerate (figura B 6.1).

Mişcarea punctului material M în raport cu sistemul fix se numeşte *mişcare absolută*. Viteza (respectiv acceleraţia) punctului în această mişcare se numeşte *viteză absolută* (respectiv *acceleraţie absolută*) şi se notează cu $\vec{v}_a$ (respectiv $\vec{a}_a$).

Mişcarea punctului material M în raport cu sistemul mobil se numeşte *mişcare relativă*. Viteza (respectiv acceleraţia) punctului în această mişcare se numeşte *viteză relativă* (respectiv *acceleraţie relativă*) şi se notează cu $\vec{v}_r$ (respectiv $\vec{a}_r$).

Se numeşte *mişcare de transport* mişcarea în raport cu sistemul fix a punctului solidar cu reperul mobil şi care în momentul considerat coincide cu punctul a cărei mişcare se studiază. Viteza (respectiv acceleraţia) punctului M în această mişcare se numeşte *viteză de transport* (respectiv *acceleraţie de transport*) şi se notează cu $\vec{v}_t$ (respectiv $\vec{a}_t$).

Scanned with OKEN Scanner

Compunerea vitezelor se face în conformitate cu relaţia vectorială :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t \tag{6.1}$$

unde viteza relativă este dată de formula :

$$\vec{v}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \tag{6.2}$$

iar viteza de transport se obţine cu relaţia lui Euler :

$$\vec{v}_t = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{6.3}$$

Modulul vitezei absolute este :

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2 v_r v_t \cos\left(\hat{\vec{v}_r, \vec{v}_t}\right)} \tag{6.4}$$

Compunerea acceleraţiilor se face în conformitate cu relaţia vectorială :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C \tag{6.5}$$

unde :

$$\vec{a}_r = \frac{\partial \vec{v}_r}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \tag{6.6}$$

$$\vec{a}_t = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) \tag{6.7}$$

$$\vec{a}_C = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_r \tag{6.8}$$

Componenta $\vec{a}_C$ a acceleraţiei absolute $\vec{a}_a$ se numeşte *acceleraţie Coriolis* sau *acceleraţie complementară.*

Rezolvare:

Mişcarea relativă a mobilului M este o mişcare rectilinie, pe OB, în conformitate cu legea $s(t) = 16 - 8\cos 3\pi t$. Mişcarea de transport se obţine solidarizând mobilul cu placa (adică făcând să înceteze mişcarea relativă). Mobilul M va executa în acest caz o mişcare circulară, pe cercul cu centru în M' (figura VI 1.2), de rază $M'M = s \cdot \sin 30^0 = \frac{s}{2}$, aflat într-un plan perpendicular pe OB, după legea $\varphi(t) = 0{,}9\,t^2 - 9\,t^3$.

Scanned with OKEN Scanner

Studiul vitezelor (figura VI 1.2)

Viteza absolută $\vec{v}_a$ a mobilului M se obţine din relaţia vectorială:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

Vectorul viteză relativă, $\vec{v}_r$, este dirijat în lungul dreptei OA, de la O spre A, şi are modulul $v_r = \dot{s} = 24 \sin 3\pi t$. Vectorul viteză de transport, $\vec{v}_t$, este perpendicular pe "raza" M'M, sensul său este determinat de vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ (adică sensul de rotaţie al plăcii) iar modulul se obţine cu relaţia $v_t = MM' \cdot \omega$. Dar $MM' = \frac{s}{2}$, $\omega = \dot{\varphi} = 1{,}8t - 27t^2$, astfel încât $v_t = \frac{1}{2}(16 - 8\cos 3\pi t)(1{,}8t - 27t^2)$.

Vectorul viteză absolută, $\vec{v}_a$, rezultă prin compunerea vitezelor relativă şi de transport şi are modulul $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$. Pentru $t = \frac{2}{9}$ s se obţine:

$s = 20\,cm$, $\omega = -\frac{4}{15}\,rad/s$, $v_r = 12\sqrt{3}\,\pi \cong 65{,}2$ cm/s, $v_t = 9{,}3\,cm/s$, $v_a = 65{,}9\,cm/s$.

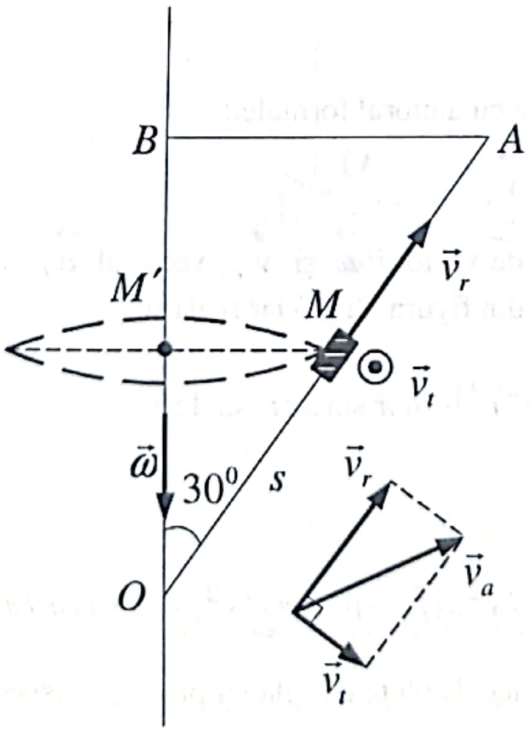


Figura VI.1.2.

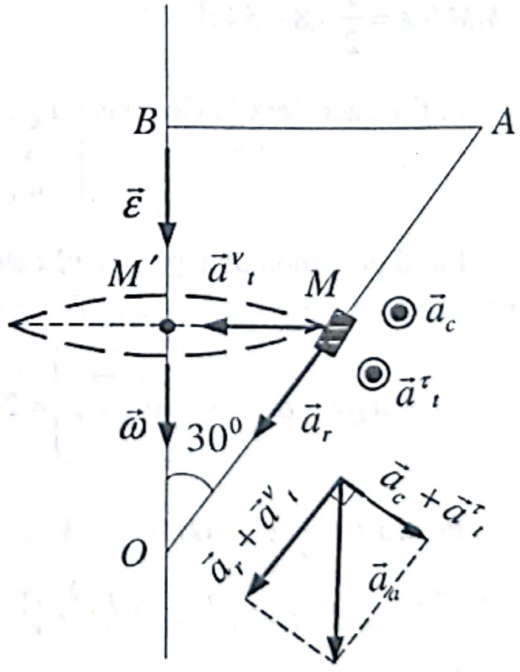


Figura VI.1.3.

Scanned with OKEN Scanner

Studiul acceleraţiilor (figura VI 1.3)

Acceleraţia absolută, $\vec{a}_a$, se obţine din relaţia:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_C$$

Vectorul acceleraţie relativă, $\vec{a}_r$, este dirijat în lungul dreptei OA, de la A spre O şi are scalarul $a_r = \ddot{s} = 72\pi^2 \cos 3\pi t \; cm/s^2$. Mişcarea de transport fiind o mişcare circulară caracterizată prin vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ şi acceleraţie unghiulară $\vec{\varepsilon}$ nenuli, rezultă că vectorul acceleraţie de transport, $\vec{a}_t$, se obţine din relaţia:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_t^{\,\nu} + \vec{a}_t^{\,\tau}$$

Acceleraţia de transport normală, $\vec{a}_t^{\,\nu}$, are direcţia MM ', sensul de la M la M ' şi modulul $a_t^{\nu} = MM' \cdot \omega^2 = \frac{s}{2}\left(1{,}8t - 27t^2\right)^2 \; cm/s^2$. Deoarece $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 1{,}8 - 54t < 0$, pentru $t = t_1$, rezultă că acceleraţia de transport tangenţială, $\vec{a}_t^{\,\tau}$, este perpendiculară pe "raza" MM ', sensul său fiind determinat de vectorul $\vec{\varepsilon}$. Scalarul său este: $a_t^{\tau} = MM' \cdot \varepsilon = \frac{s}{2}(1{,}8 - 54t)$.

În fine, acceleraţia Coriolis, $\vec{a}_C$, se obţine cu ajutorul formulei:

$$\vec{a}_C = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

Fiind perpendicular pe planul determinat de vectorii $\vec{\omega}$ şi $\vec{v}_r$, vectorul $\vec{a}_C$ va fi perpendicular pe planul plăcii, sensul său va fi cel din figura VI 1.3 iar scalarul

$$a_C = 2\,\omega v_r \sin\left(\hat{\vec{\omega}, \vec{v}_r}\right) = 2\left(1{,}8t - 27t^2\right) \cdot 24\pi \sin 3\pi t \cdot \sin 150^0$$

Pentru $t = \frac{2}{9}\; s$ se obţine:

$$\varepsilon = 10{,}2 \; rad/s^2, a_r = -355 \; cm/s^2, a_t^{\nu} = 8{,}7 \; cm/s^2, a_t^{\tau} = -10{,}2 \; cm/s^2, a_C = 61 \; cm/s^2$$

Însumând pe rând componentele acceleraţiei absolute din planul plăcii şi, respectiv, cele perpendiculare pe planul plăcii se găseşte că:

$$a_a = \sqrt{\left(a_C + a_t^{\tau}\right)^2 + \left[\left(a_t^{\nu}\right)^2 + a_r^2 + 2\,a_r\,a_t^{\nu}\cos 60^0\right]} \cong 395 \; cm/s^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

VI 2) Mobilul M se deplasează la periferia semidiscului D de rază R după legea $s(t)=AM=\pi\left(1+\left[\frac{n}{10}\right]\right)\cdot t^2$ (figura VI 2). Discul este articulat în A şi B cu manivelele O_1A şi O_2B care se rotesc în jurul punctelor O_1, respectiv O_2, după legea $\varphi(t)=\frac{5\pi}{48}\left(1+\left\{\frac{n}{5}\right\}\right)$. Să se determine viteza şi acceleraţia absolută a punctului M la momentul de timp $t_1=2$. Se mai dau: $O_1A=O_2B=30+\left[\frac{n}{12}\right], R=20+\left[\frac{n}{8}\right]$.

Observaţii: i) [x] simbolizează partea întreagă a numărului real x iar {x} partea sa fracţionară.
ii) Se vor folosi următoarele unităţi de măsură: *cm* – pentru lungime, *radiani* – pentru unghiuri, *secunde* – pentru timp.

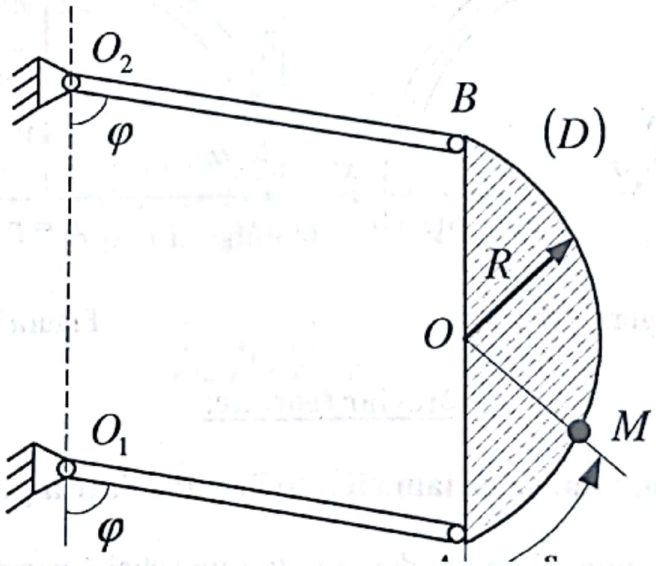


Figura VI 2

Tema nr. 7

Dinamica mişcării absolute a punctului material

VII 1) În interiorul unui tub de sticlă subţire (figura VII 1.1), având forma unei parabole de ecuaţie $y=x\left(1-\frac{x}{2p}\right)$, se aruncă o bilă de masă m cu viteza iniţială $\vec{v}_0$ (tangentă la axa tubului în O). Considerând *datele fixe*:

Scanned with OKEN Scanner

$g = 9{,}81\ m/s^2$, $m = 0{,}37\ kg$ $v_0 = 9{,}27\ m/s$, $t = 0 : M_0 \equiv O$, $\vec{v} = \vec{v}_0$,

şi *datele variabile*:

$$p = 1{,}62 + \left[\frac{n}{8}\right] \quad , \quad x_1 = p\left(1 + \left\{\frac{n}{3}\right\} \cdot \cos \pi n\right) \quad \text{(m)}$$

şi presupunând că mişcarea are loc fără frecare, se cer:

a) Proiecţiile vitezei $\vec{v}_1$ şi acceleraţiei $\vec{a}_1$ în punctul de abscisă x_1 pe axele reperului cartezian Oxy şi pe axele triedrului Frenet;
b) Reacţiunea normală în punctul de abscisă x_1.

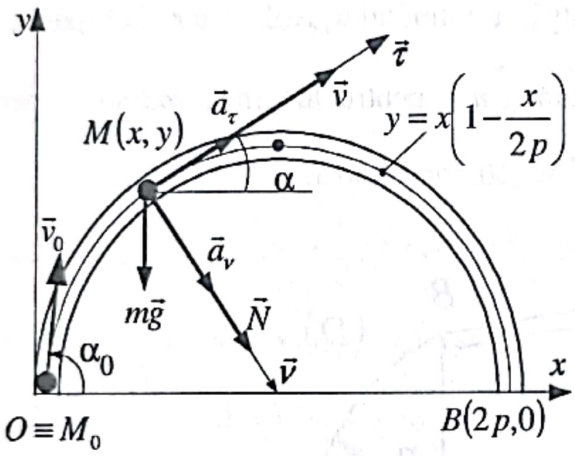


Figura VII 1.1

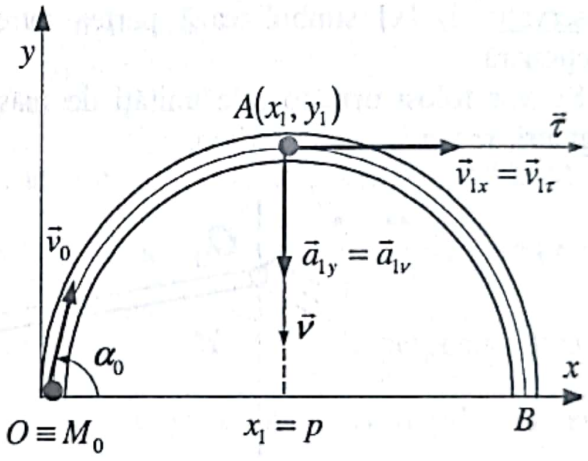


Figura VII 1.2

Breviar teoretic:

B 1. Legea fundamentală a dinamicii mişcării absolute a punctului material

Această lege exprimă legătura dintre forţa care solicită punctul aflat în mişcare şi acceleraţia mişcării acestuia, şi anume:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{7.1}$$

unde m este masa punctului material.

În cazul unui punct material liber, acţionat de mai multe forţe active $\vec{F}_i, i = \overline{1,n}$, ecuaţia fundamentală a dinamicii (7.1) capătă forma:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{7.2}$$

Dacă pe lângă sistemul forţelor active $\vec{F}_i, i = \overline{1,n}$, asupra punctului mai acţionează şi un sistem de forţe de legătură $\vec{F}'_j, j = \overline{1,p}$, atunci legea fundamentală a dinamicii punctului material se exprimă prin relaţia vectorială:

Scanned with OKEN Scanner

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{p} \vec{F}_j \qquad (7.3)$$

Notând cu $\vec{r}(t)$ vectorul de poziţie al punctului aflat în mişcare faţă de un punct fix O şi observând că forţele care acţionează asupra punctului material depind, în general, de timp, poziţia şi viteza acestuia, se obţine următoarea formă a ecuaţiei fundamentale:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{R}\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right) \qquad (7.4)$$

unde $\vec{R}$ reprezintă rezultanta tuturor forţelor care acţionează asupra punctului material.

B 2. Problemele generale ale dinamicii punctului material

În dinamica punctului material se studiază două categorii de probleme:

a) Problema directă

Se cunosc forţele care acţionează asupra punctului material ca natură, direcţie, sens şi mărime şi se cere să se stabilească mişcarea punctului material.

Problema se rezolvă prin integrarea ecuaţiei (7.4) şi găsirea soluţiei generale sub forma:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2\right) \qquad (7.5)$$

unde $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ sunt constante vectoriale de integrare care se determină cu ajutorul condiţiilor iniţiale:

$$t = 0 \; : \; \begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{r}\left(0, \vec{C}_1, \vec{C}_2\right) \\ \vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}\left(0, \vec{C}_1, \vec{C}_2\right) \end{cases} \qquad (7.6)$$

adică pe baza poziţiei şi vitezei punctului material din momentul începerii mişcării.

b) Problema inversă

Cunoscându-se mişcarea punctului material dată prin relaţia:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (7.7)$$

şi masa m a acestuia, se cere să se determine forţa sau rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului.

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia acestei probleme, de forma

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}(t) \tag{7.8}$$

este unică din punct de vedere matematic, dar în general problema nu este univoc determinată în sensul că se determină direcţia, sensul şi modulul forţei nu însă şi natura ei.

B 3. Ecuaţiile diferenţiale scalare ale mişcării punctului material în diferite sisteme de coordonate

Proiectând ecuaţia vectorială (7.4) pe axele unui sistem de referinţă convenabil ales se obţin ecuaţiile diferenţiale scalare ale mişcării punctului material după cum urmează:

a) În coordonate carteziene

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \\ m\ddot{y} &= F_y\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \\ m\ddot{z} &= F_z\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \end{aligned} \tag{7.9}$$

b) În coordonate cilindrice

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r \quad , \quad m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = F_\theta \quad , \quad m\ddot{z} = F_z \tag{7.10}$$

În sistemul de coordonate polare (r, θ) se utilizează primele două relaţii (7.10).

c) În coordonate Frenet

$$m\dot{v} = F_\tau \quad , \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_\nu \quad , \quad 0 = F_\beta \tag{7.11}$$

Rezolvare:

a) Se va considera, pentru început, un studiu general al problemei şi apoi rezultatele se vor particulariza pentru $n = 3$.

În punctul de abscisă x_1 ordonata este $y_1 = x_1\left(1 - \frac{x_1}{2p}\right)$ iar viteza (tangentă la axa tubului) făcând unghiul $\alpha_1 = arctg\ y'(x_1) = arctg\left(1 - \frac{x_1}{p}\right)$ cu orizontala.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea scalarului vitezei se aplică teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic între poziţiile $M_0\,(t=0)$ şi $M_1\,(t=t_1)$:

$$\frac{m v_1^2}{2}-\frac{m v_0^2}{2}=-m g\, y_1 \qquad (1)$$

Rezultă $v_1=\sqrt{v_0^2-2 g\, y_1}$. Deoarece $mas\left(\vec{v}_1, Ox\right)=\alpha_1$, se obţin proiecţiile:

$$v_{1x}=v_1\cos\alpha_1 \quad , \quad v_{1y}=v_1\sin\alpha_1 \qquad (2)$$

Pe axele triedrului Frenet:

$$v_{1\tau}=v_1 \quad , \quad v_{1\nu}=0 \qquad (3)$$

Ecuaţia fundamentală a dinamicii, $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}$, proiectată pe axele triedrului Frenet conduce la ecuaţiile scalare:

$$m a_{1\tau}=-m g\sin\alpha_1 \quad , \quad m a_{1\nu}=N_1+m g\cos\alpha_1 \qquad (4)$$

Din prima ecuaţie (4) se determină componenta tangenţială a acceleraţiei mobilului:

$$a_{1\tau}=-g\sin\alpha_1 \qquad (5)$$

Componenta normală a acceleraţiei este dată de formula $a_{1\nu}=\frac{v_1^2}{\rho_1(x_1)}$, unde raza de curbură are expresia $\rho_1(x_1)=\frac{\left\{1+\left[y'(x_1)\right]^2\right\}^{3/2}}{\left|y''(x_1)\right|}=\frac{\left[1+\left(1-\frac{x_1}{p}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{1}{p}}$. Observând că $\vec{a}_1=\vec{a}_x+\vec{a}_{1y}=\vec{a}_{1\tau}+\vec{a}_{1\nu}$ şi proiectând această relaţie pe axele reperului Oxy găsim componentele carteziene ale acceleraţiei:

$$a_{1x}=a_{1\tau}\cos\alpha_1+a_{1\nu}\sin\alpha_1 \;,\; a_{1y}=a_{1\tau}\sin\alpha_1-a_{1\nu}\cos\alpha_1 \qquad (6)$$

b) Reacţiunea normală $\vec{N}_1$ se determină din a doua relaţie (2) :

$$N_1=m\left(a_{1\nu}-g\cos\alpha_1\right) \qquad (7)$$

<u>Caz particular : n = 3</u> (figura VII 1.2)

$p=1{,}62\,m$, $x_1=1{,}62\,m$, $y_1=0{,}81\,m$, $\alpha_1=0$,

$v_{1x}=8{,}358\,m/s$, $v_{1y}=0\,m/s$, $a_{1x}=0\,m/s^2$, $a_{1y}=-43{,}121\,m/s^2$,

$v_{1\tau}=8{,}358\,m/s$, $v_{1\nu}=0\,m/s$, $a_{1\tau}=0\,m/s^2$, $a_{1\nu}=43{,}121\,m/s^2$, $N_1=12{,}325\,N$.

Scanned with OKEN Scanner

VII 2) Pe un cilindru fix de rază R se deplasează fără frecare un punct material de masă m (figura VII 2). La începutul mişcării mobilul se găsea în punctul A şi avea viteza iniţială orizontală $\vec{v}_0$. Considerând *datele fixe* $g = 9{,}81\, m/s^2, m = 0{,}25\, kg$ şi *datele variabile* $v_0 = 10 + \left[\frac{n}{5}\right]$ (m/s), $R = 0{,}5 + 0{,}1 \cdot \left[\frac{n}{4}\right]$ (m), se cere:

a) Să se determine legile de variaţie $v = v(\theta)$, $a_\tau = a_\tau(\theta)$ şi $a_\nu = a_\nu(\theta)$ pentru intervalul de timp în care mobilul se află în contact cu cilindrul;

b) Unghiul $\theta \overset{not}{=} \alpha$ la care se produce desprinderea mobilului de pe suprafaţa cilindrului;

c) Să se determine distanţa $OC \overset{not}{=} \xi$, punctul C fiind punctul în care mobilul loveşte solul.

Observaţie : [x] simbolizează partea întreagă a numărului real x.

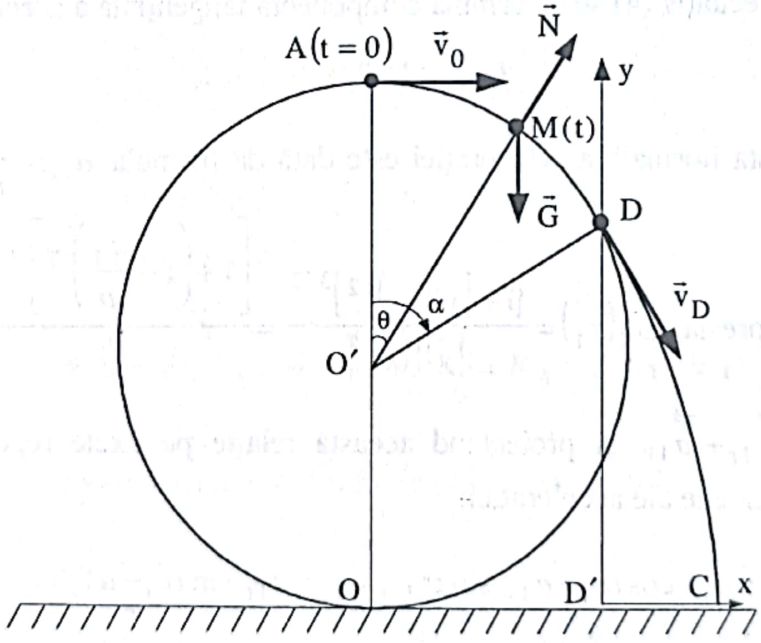


Figura VII 2.

Scanned with OKEN Scanner

Tema nr. 8

Noţiuni fundamentale ale dinamicii: Momente de inerţie mecanice, lucru mecanic, putere mecanică, energie mecanică, impuls, moment cinetic

VIII 1) Se consideră corpul omogen din figura VIII 1.1, pentru care se cunosc masa M şi dimensiunea a. Să se determine momentul de inerţie faţă de axa Oy.

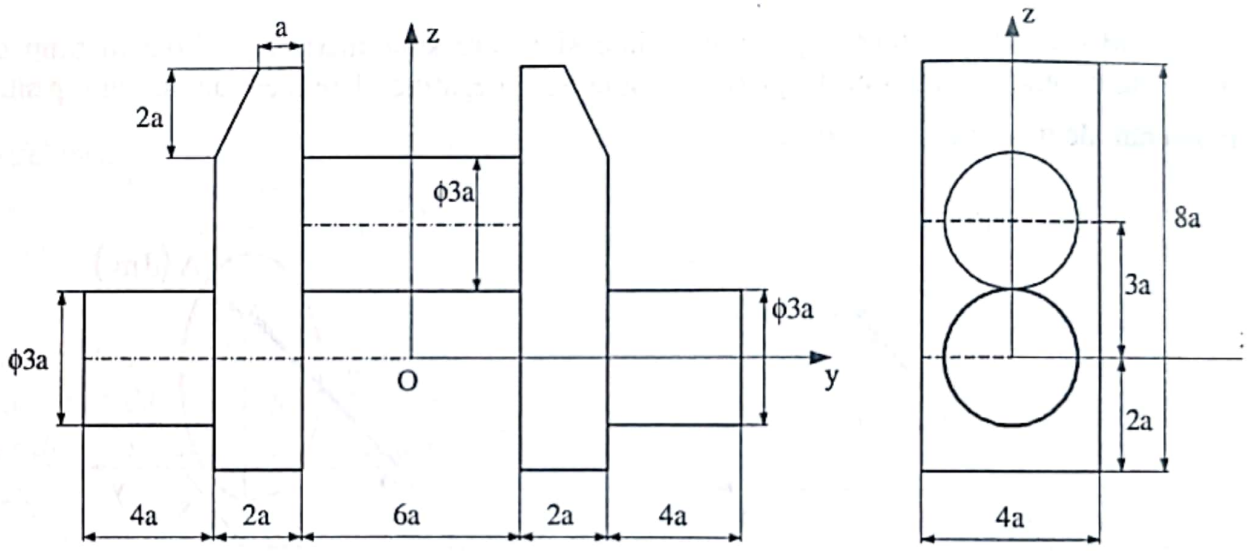


Figura VIII 1.1

Breviar teoretic:

B 1. Momente de inerţie mecanice

B 1.1. Cazul sistemelor de puncte materiale. Definiţii.

Fie un sistem de n puncte materiale raportat la un reper cartezian Oxyz, plasate în punctele $A_i(x_i, y_i, z_i), i=\overline{1,n}$, şi având masele $m_i, i=\overline{1,n}$ (figura B 8.1). Se definesc următoarele momente de inerţie:

a) Momente de inerţie planare

$$J_{Oxy}=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 \quad , J_{Oyz}=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 \quad , J_{Ozz}=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \qquad (8.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

b) *Momente de inerţie axiale*

$$J_x=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2+z_i^2\right)\ ,\ J_y=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(z_i^2+x_i^2\right)\ ,\ J_z=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right) \qquad (8.2)$$

c) *Moment de inerţie polar*

$$J_O=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right) \qquad (8.3)$$

d) *Momente centrifugale*

$$J_{xy}=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i\ ,\ J_{yz}=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i\ ,\ J_{zx}=\sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i \qquad (8.4)$$

Momentele de inerţie planare, axiale şi polare sunt mărimi pozitive în timp ce momentele centrifugale pot fi pozitive, nule sau negative. Unitatea de măsură pentru momentul de inerţie este $kg \cdot m^2$.

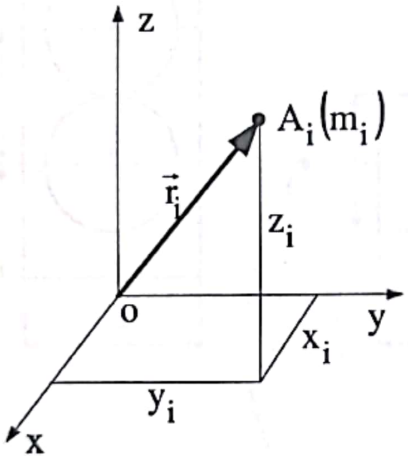


Figura B 8.1

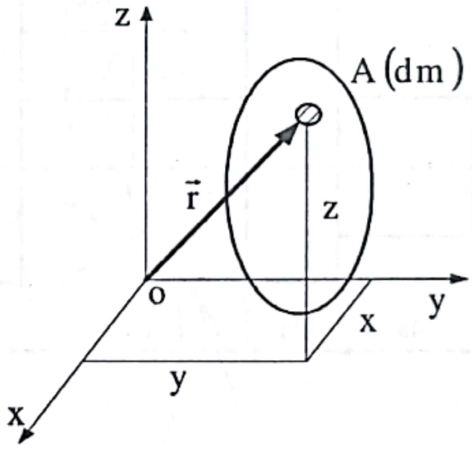


Figura B 8.2

B 1.2. Cazul unui solid rigid. Definiţii.

În cazul unui solid rigid (figura B 8.2) sumele din expresiile (8.1 – 8.4) se înlocuiesc prin integrale. Astfel, avem:

e) *Momente de inerţie planare*

$$J_{Oxy}=\int_D z^2\,dm\ ,\ J_{Oyz}=\int_D x^2\,dm\ ,\ J_{Ozx}=\int_D y^2\,dm \qquad (8.5)$$

f) *Momente de inerţie axiale*

$$J_x=\int_D\left(y^2+z^2\right)dm\ ,\ J_y=\int_D\left(z^2+x^2\right)dm\ ,\ J_z=\int_D\left(x^2+y^2\right)dm \qquad (8.6)$$

g) *Moment de inerţie polar*

$$J_O=\int_D\left(x^2+y^2+z^2\right)dm \qquad (8.7)$$

Scanned with OKEN Scanner

h) Momente centrifugale

$$J_{xy}=\int_D x\,y\,dm \quad , J_{yz}=\int_D y\,z\,dm \quad , J_{zx}=\int_D z\,x\,dm \tag{8.8}$$

x, y, z reprezintă coordonatele unui element infinitezimal arbitrar de masă dm al domeniului (D) ocupat de rigid.

B 1.3. Relaţii între momentele de inerţie

Între cele 10 momente de inerţie definite mai sus există următoarele relaţii de dependenţă:

$$J_O=\frac{1}{2}\left(J_x+J_y+J_z\right) \tag{8.9}$$

$$J_{Oxy}=\frac{1}{2}\left(J_x+J_y-J_z\right) \quad , J_{Oyz}=\frac{1}{2}\left(J_y+J_z-J_x\right) \quad , J_{Ozx}=\frac{1}{2}\left(J_z+J_x-J_y\right) \tag{8.10}$$

astfel încât doar şase dintre ele sunt independente ($J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$).

B 1.4. Variaţia momentelor de inerţie faţă de axe paralele. Teorema lui Steiner.

Teorema lui Steiner afirmă că momentul de inerţie faţă de axa Δ_1 este egal cu momentul de inerţie faţă de o axă Δ ce trece prin centrul de masă al sistemului şi este paralelă cu axa Δ_1 plus masa sistemului înmulţită cu pătratul distanţei dintre cele două axe:

$$J_{\Delta_1}=J_{\Delta}+M\cdot d^2 \tag{8.11}$$

Considerând două sisteme carteziene Cxyz şi $Ox_1y_1z_1$ cu axele paralele două câte două, unde $C(x_C, y_C, z_C)$ este centrul de masă al sistemului (figura B 8.3), putem scrie:

$$J_{x_1}=J_x+M\cdot\left(y_C^2+z_C^2\right) \quad , J_{y_1}=J_y+M\cdot\left(z_C^2+x_C^2\right) \quad , J_{z_1}=J_z+M\cdot\left(x_C^2+y_C^2\right) \tag{8.12}$$

$$J_{x_1y_1}=J_{xy}+M\,x_C y_C \quad , J_{y_1z_1}=J_{yz}+M\,y_C z_C \quad , J_{z_1x_1}=J_{zx}+M\,z_C x_C \tag{8.13}$$

B 1.5. Cazuri particulare de corpuri omogene

a) Discul omogen de masă M şi rază R (figura B 8.4)

$$J_O=\frac{M\,R^2}{2} \quad , \quad J_x=J_y=\frac{M\,R^2}{4} \quad , \quad J_z=\frac{M\,R^2}{2} \quad , \quad J_{xy}=J_{yz}=J_{zx}=0 \tag{8.14}$$

b) Bara rectilinie omogenă de masă m şi lungime l (figura B 8.5)

$$J_O=\frac{m\,l^2}{12} \quad , \quad J_y=J_z=\frac{m\,l^2}{12} \quad , \quad J_x=0 \quad , \quad J_{xy}=J_{yz}=J_{zx}=0 \tag{8.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Placa plană dreptunghiulară omogenă de masă M şi laturi a şi b (figura B 8.6)

$$J_O = J_z = \frac{M\left(a^2+b^2\right)}{12},\quad J_x = \frac{M b^2}{12},\quad J_y = \frac{M a^2}{12},\quad J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0 \qquad (8.16)$$

d) Placa plană triunghiulară omogenă de masă M şi catete a şi b (figura B 8.7)

$$J_O = J_z = \frac{M\left(a^2+b^2\right)}{18},\quad J_x = \frac{M b^2}{18},\quad J_y = \frac{M a^2}{18},\quad J_{yz} = J_{zx} = 0 \qquad (8.17)$$

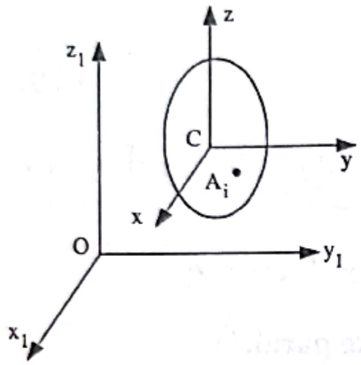


Figura B 8.3

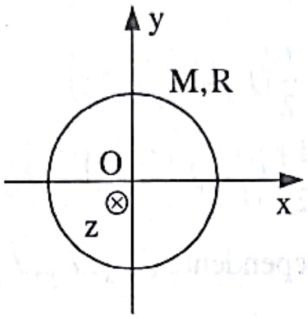


Figura B 8.4

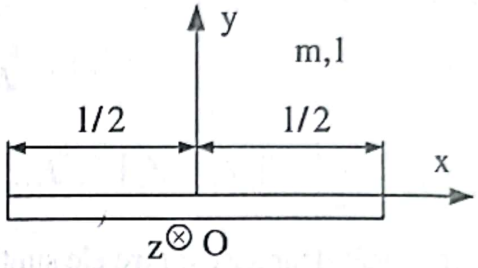


Figura B 8.5

Rezolvare:

Se poate arăta că volumul acestui corp este $V = \left(\frac{63\pi}{2}+120\right)a^3$, astfel încât densitatea materialului din care este confecţionat corpul se determină cu relaţia: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\left(\frac{63\pi}{2}+120\right)a^3}$. Pentru determinarea momentului de inerţie axial J_y se împarte piesa în corpuri elementare şi, datorită simetriei (figura VIII 1.2), se poate scrie:

$$J_y = 2J_{1y} + 2J_{2y} + J_{3y} \qquad (1)$$

Momentul de inerţie J_{1y} se obţine pe baza relaţiei (8.14) din breviarul teoretic pentru un disc omogen:

$$J_{1y} = \frac{m_1 R_1^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi(3a)^2}{4}\cdot 4a\right)\cdot\rho\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{81\pi\rho a^5}{8} \qquad (2)$$

Folosind acelaşi rezultat şi formula lui Steiner obţinem şi expresia lui J_{3y}:

$$J_{3y} = J_{y3} + m_3\cdot(3a)^2 = \frac{m_3 R_3^2}{2} + m_3\cdot(3a)^2 = \frac{2187\pi\rho a^5}{16} \qquad (3)$$

deoarece $m_3 = \rho\cdot V_3 = \rho\cdot\frac{\pi\cdot(3a)^2}{4}\cdot 6a.$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea momentului de inerţie J_{2y} se împarte corpul 3 în trei prisme drepte conform figurii VIII 1.3.

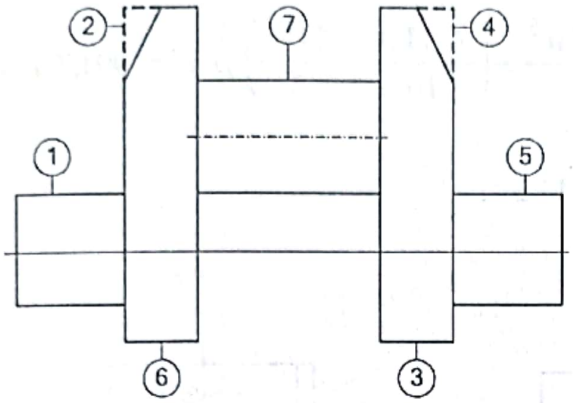


Figura VIII 1.2

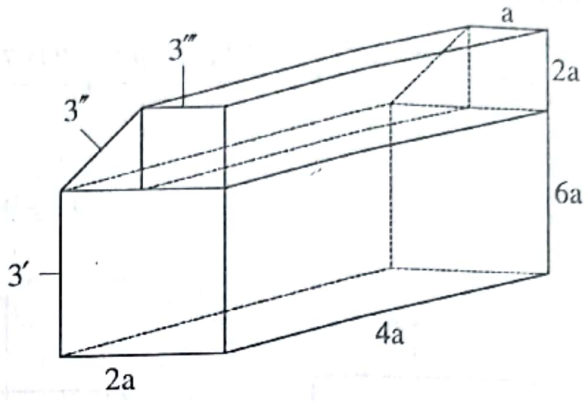


Figura VIII 1.3

Se poate scrie deci că:

$$J_{2y} = J'_{2y} + J''_{2y} + J'''_{2y} \tag{4}$$

J'_{2y} se obţine utilizând relaţia pentru calculul momentului de inerţie al unei plăci dreptunghiulare omogene (vezi figura VIII 1.4) şi formula lui Steiner:

$$J'_{2y} = J_{y'_2} + m'_2 \cdot a^2 = \frac{m'_2}{12}\left[(6a)^2 + (4a)^2\right] + m'_2 \cdot a^2 = 256\,\rho\, a^5 \tag{5}$$

deoarece $m'_2 = \rho \cdot 6a \cdot 4a \cdot 2a$.

Procedând în mod asemănător (vezi figura VIII 1.5) obţinem şi:

$$J'''_{2y} = J_{y'''_2} + m'''_2 \cdot (7a)^2 = \frac{m'''_2}{12}\left[(2a)^2 + (4a)^2\right] + m'''_2 \cdot (7a)^2 = \frac{1216}{3}\,\rho\, a^5 \tag{6}$$

deoarece $m'''_2 = \rho \cdot 2a \cdot 4a \cdot a$.

În fine, folosind relaţia prezentată în breviarul teoretic pentru momentul de inerţie al unei plăci triunghiulare omogene (vezi figura VIII 1.6) şi formula lui Steiner rezultă şi expresia lui J''_{2y}:

$$J''_{2y} = J_{y''_2} + m''_2 \cdot \left(4a + \frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{m''_2 (2a)^2}{18} + m''_2 \cdot \left(\frac{14a}{3}\right)^2 = 88\,\rho\, a^5 \tag{7}$$

În deducerea relaţiei (7) s-a folosit faptul că $m''_2 = \rho \cdot \frac{a \cdot 2a}{2} \cdot 4a$.

Din relaţiile (5), (6) şi (7), prin sumare, se găseşte că:

$$J_{2y} = 256\,\rho\, a^5 + 88\,\rho\, a^5 + \frac{1216}{3}\,\rho\, a^5 = \frac{2248}{3}\,\rho\, a^5$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul de inerţie faţă de axa Oy al piesei din figura VIII 1.1 se obţine, tot prin sumare, din relaţiile (2, 3, 8):

$$J_y = 2\cdot\frac{81\,\rho\,\pi\,a^5}{8} + 2\cdot\frac{2248\,\rho\,a^5}{3} + \frac{2187\,\rho\,\pi\,a^5}{8} = \left(\frac{2511\,\pi}{16} + \frac{4496}{3}\right)\rho\,a^5 \cong 1991{,}7\,\rho\,a^5$$

sau

$$J_y \cong 9{,}096\,M\,a^2 .$$

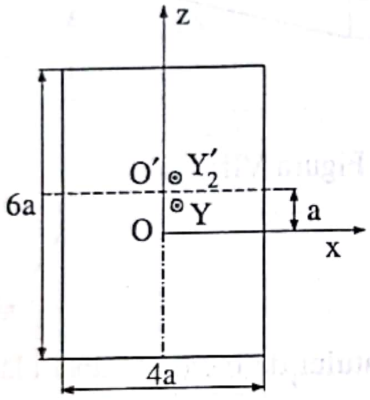


Figura VIII 1.4

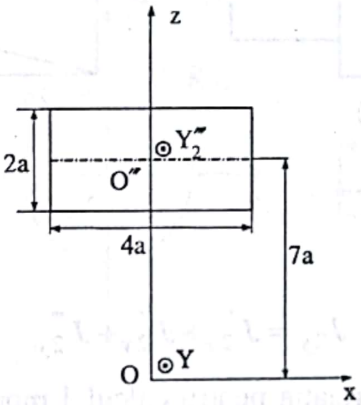


Figura VIII 1.5

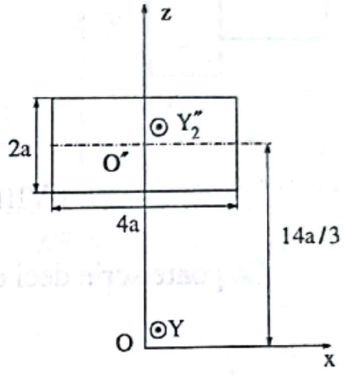


Figura VIII 1.6

VIII 2) O bară omogenă AB de lungime $l_1 = 1{,}6\,m$ şi masă $M = 0{,}4\,kg$, articulată în A, se roteşte cu viteza unghiulară $\omega_1 = \dot{\alpha}$ în jurul unei axe fixe Az (figura VIII 2). Pe bara AB alunecă, prin intermediul culisei C, bara omogenă CD de lungime $l_2 = 1{,}2\,m$ şi masă $M_2 = 0{,}5\,kg$ care face unghiul $\beta = 45^0$ cu direcţia AB. Ştiind că la momentul t = 0, $\dot{\alpha} = 3{,}2\,rad/s$, $\ddot{\lambda} = 1{,}2\,m/s$, $\alpha = 35^0$, $\lambda = 0{,}2\,m$, se cer:

a) Coordonatele şi viteza centrului de masă;
b) Impulsul şi energia cinetică totală a sistemului;
c) Momentul cinetic al barei AB faţă de axa Az, momentul cinetic al barei CD faţă de axa C_2z şi momentul cinetic al sistemului de bare faţă de axa ce trece prin centrul de masă şi este perpendiculară pe planul Axy.

Observaţie: Toate determinările numerice se vor face la momentul t = 0.

Scanned with OKEN Scanner

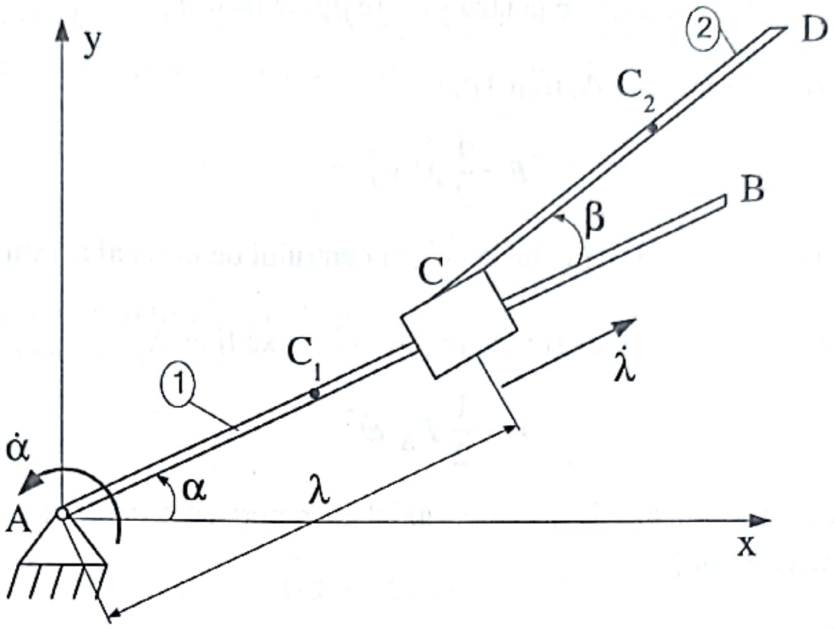


Figura VIII 2

Breviar teoretic:

B 2. Energia cinetică, impulsul, momentul cinetic

B 2.1. Energia cinetică

B 2.1.1. Punct material. Sistem discret de puncte materiale

Pentru un punct material de masă m şi viteză $\vec{v}$, prin definiţie, energia cinetică este:

$$E \overset{def}{=} \frac{1}{2} m v^2 \tag{8.18}$$

Pentru un sistem discret de puncte materiale de mase $m_i, i=\overline{1,n}$, şi viteze $\vec{v}_i, i=\overline{1,n}$, energia cinetică se defineşte prin relaţia:

$$E \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{8.19}$$

B 2.1.2. Solid rigid

Energia cinetică a unui solid rigid se defineşte prin relaţia:

$$E \overset{def}{=} \int_D \frac{1}{2} v^2 \, dm \tag{8.20}$$

unde integrala se consideră pe întreg domeniul ocupat de acesta.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul mişcărilor particulare ale rigidului energia cinetică se calculează cu ajutorul relaţiilor care dau distribuţia de viteze pentru fiecare tip de mişcare.

a) Solid rigid în mişcare de translaţie

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 \tag{8.21}$$

unde M este masa rigidului iar v_C modulul vitezei centrului de masă al acestuia.

b) Solid rigid în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe Δ

$$E = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \tag{8.22}$$

unde J_Δ este momentul de inerţie mecanic axial în raport cu axa Δ iar ω este viteza unghiulară a mişcării de rotaţie.

c) Solid rigid în mişcare plan – paralelă

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta_C} \omega^2 \tag{8.23}$$

unde M este masa rigidului, J_{Δ_C} este momentul de inerţie mecanic axial în raport cu axa ce trece prin centrul maselor şi este paralelă cu suportul vectorului viteză unghiulară $\vec{\omega}$ iar v_C este viteza centrului de masă al rigidului.

B 2.2. Impulsul

B 2.2.1. Punct material. Sistem discret de puncte materiale.

Impulsul unui punct material de masă m şi viteză $\vec{v}$ se defineşte prin relaţia:

$$\vec{H} \overset{def}{=} m \vec{v} \tag{8.24}$$

Pentru un sistem discret de puncte materiale de mase $m_i, i = \overline{1,n}$, şi viteze $\vec{v}_i, i = \overline{1,n}$, impulsul se defineşte prin :

$$\vec{H} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \tag{8.25}$$

B 2.2.2. Impulsul unui solid rigid

Impulsul unui solid rigid se defineşte prin relaţia:

$$\vec{H} \overset{def}{=} \int_D \vec{v}\, dm \tag{8.26}$$

unde integrala se consideră pe întreg domeniul ocupat de rigidul respectiv.

Scanned with OKEN Scanner

Observaţii: i) Unitatea de măsură pentru impuls în sistemul SI este $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.
ii) Având în vedere relaţia de definiţie a centrului de masă:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{8.27}$$

prin derivare se obţine o formulă utilă pentru determinarea impulsului unui sistem de puncte materiale sau al unui solid rigid:

$$\vec{H} = M \cdot \vec{v}_C \tag{8.28}$$

unde M este masa sistemului material iar $\vec{v}_C$ este viteza centrului său de masă.

B 2.3. Moment cinetic

B 2.3.1. Punct material. Sistem discret de puncte materiale.

Momentul cinetic al unui punct material de masă m, care se mişcă cu viteza $\vec{v}$, calculat în raport cu un punct fix , este momentul vectorului impuls $\vec{H}$ al punctului calculat în raport cu O:

$$\vec{K}_O \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{8.29}$$

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale de mase $m_i, i = \overline{1,n}$, şi viteze $\vec{v}_i, i = \overline{1,n}$, în raport cu un pol O, se calculează cu relaţia:

$$\vec{K}_O \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \tag{8.30}$$

B 2.3.2. Solid rigid

Momentul cinetic al unui solid rigid se defineşte prin relaţia:

$$\vec{K}_O \overset{def}{=} \int_D \vec{r} \times \vec{v}\, dm \tag{8.31}$$

unde integrala se extinde pe întreg domeniul ocupat de solidul respectiv.

În cazul mişcărilor particulare ale rigidului momentul cinetic se calculează cu ajutorul relaţiilor care dau distribuţia de viteze pentru fiecare tip de mişcare.

Scanned with OKEN Scanner

a) Solid rigid în mişcare de translaţie

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times \vec{H} \tag{8.32}$$

unde $\vec{r}_C$ este vectorul de poziţie al centrului de masă al rigidului iar $\vec{H}$ impulsul său.

b) Solid rigid în mişcare de rotaţie în jurul unei axe fixe Δ

Proiecţiile momentului cinetic pe axele unui sistem de referinţă cartezian Oxyz sunt:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_y &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ K_z &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z \end{aligned} \tag{8.33}$$

Cazuri particulare:

1) Dacă axa Oz coincide cu axa de rotaţie, atunci $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \omega$. Proiecţiile momentului cinetic devin:

$$K_x = -J_{xz}\omega \quad , \quad K_y = -J_{yz}\omega \quad , \quad K_z = J_z \omega \tag{8.34}$$

2) Dacă axa Oz coincide cu axa de rotaţie iar rigidul este corp de revoluţie $(J_{xz} = J_{yz} = 0)$, atunci momentul cinetic are direcţia axei de rotaţie:

$$\vec{K}_O = K_z \vec{k} = J_z \omega \vec{k} = J_z \vec{\omega} \tag{8.35}$$

c) Solid rigid în mişcare plan-paralelă

Distribuţia de viteze se obţine prin compunerea a două câmpuri de viteze corespunzătoare unei mişcări de translaţie şi a uneia de rotaţie. Momentul cinetic corespunzător acestor mişcări va fi:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_{O,\,translatie} + \vec{K}_{O,\,rotatie} \tag{8.36}$$

Rezolvare:

a) Coordonatele centrului de masă al sistemului de bare sunt date de relaţiile:

$$\xi = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} \quad , \quad \eta = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2}$$

unde

$$x_1 = \frac{l_1}{2}\cos\alpha \quad , \quad x_2 = \lambda\cos\alpha + \frac{l_2}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$y_1 = \frac{l_1}{2}\sin\alpha \quad , \quad y_2 = \lambda\sin\alpha + \frac{l_2}{2}\sin(\alpha+\beta)$$

sunt coordonatele centrelor de masă ale celor două bare.

Scanned with OKEN Scanner

Prin derivare în raport cu timpul t se obţin componentele vitezei centrului de masă:

$$\dot{\xi}=\frac{M_1\dot{x}_1+M_2\dot{x}_2}{M_1+M_2} \quad , \quad \dot{\eta}=\frac{M_1\dot{y}_1+M_2\dot{y}_2}{M_1+M_2}$$

unde

$$\dot{x}_1=-\frac{l_1}{2}\sin\alpha\cdot\dot{\alpha} \quad , \quad \dot{x}_2=\dot{\lambda}\cos\alpha-\lambda\sin\alpha\cdot\dot{\alpha}-\frac{l_2}{2}\sin(\alpha+\beta)\cdot\dot{\alpha}$$

$$\dot{y}_1=\frac{l_1}{2}\cos\alpha\cdot\dot{\alpha} \quad , \quad \dot{y}_2=\dot{\lambda}\sin\alpha-\lambda\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}+\frac{l_2}{2}\cos(\alpha+\beta)\cdot\dot{\alpha}$$

Cu valorile numerice propuse pentru momentul $t = 0$ se găseşte că:

$$\xi=0{,}441\,m \quad , \quad \eta=0{,}596\,m \quad , \quad \dot{\xi}=-1{,}361\,m/s \quad , \quad \dot{\eta}=1{,}791\,m/s\,.$$

b) Deoarece impulsul unui solid rigid sau al unui sistem de solide rigide este egal cu produsul dintre masa sistemului şi viteza centrului său de masă se obţin proiecţiile:

$$H_x=(M_1+M_2)\dot{\xi}=-1{,}225\,kg\cdot m/s \;,\; H_y=(M_1+M_2)\dot{\eta}=1{,}612\,kg\cdot m/s$$

Energia cinetică a sistemului se obţine ca sumă a energiilor cinetice ale corpurilor componente:

$$E_C=E_C^{(1)}+E_C^{(2)}$$

Dar

$$E_C^{(1)}=\frac{J_1\omega_1^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{M_1l_1^2}{3}\dot{\alpha}^2=1{,}748\,J \quad \text{(mişcare de rotaţie)}$$

$$E_C^{(2)}=\frac{M_2v_{C_2}^2}{2}+\frac{J_{C_2}\omega_2^2}{2}=\frac{1}{2}M_2\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right)+\frac{1}{2}\frac{M_2l_2^2}{12}\dot{\alpha}^2=1{,}311\,J \quad \text{(mişcare plan-paralelă)}$$

astfel încât $E_C=3{,}059\,J$.

c) $K_{1,Az}=J_{1,Az}\cdot\omega_1=\frac{M_1l_1^2}{3}\cdot\dot{\alpha}=1{,}092\,kg\cdot m^2/s$

$$K_{2,C_2z}=J_{2,C_2z}\cdot\omega_2=\frac{M_2l_2^2}{12}\cdot\dot{\alpha}=0{,}192\,kg\cdot m^2/s\,.$$

Notând cu G centrul de masă al sistemului şi aplicând teorema lui Koenig, putem scrie:

$$\vec{K}_G=\vec{K}_A+\vec{GA}\times M_1\vec{v}_{C_1}+\vec{K}_{2C_2}+\vec{GC}_2\times\vec{v}_{C_2}$$

Proiectând pe direcţia z această relaţie se găseşte că:

$$K_{Gz}=K_{1,Az}+M_1\left(\eta\dot{x}_1-\xi\dot{y}_1\right)+K_{2,G_2z}+M_2\left[(x_2-\xi)\dot{y}_2+(\eta-y_2)\dot{x}_2\right]=0{,}501\,kg\cdot m^2/s$$

Scanned with OKEN Scanner

VIII 3) Se consideră sistemul de corpuri din figura VIII 3, format din două discuri omogene de raze R şi mase M şi patru bare omogene de lungime l şi mase m. Ştiind că:

$$R=60+10\cdot\left[\frac{n}{5}\right],\ l=100+20\cdot\left[\frac{n}{8}\right],\ M=1+0{,}3\cdot\left[\frac{n}{4}\right],\ m=0{,}4+0{,}15\cdot\left[\frac{n}{10}\right],$$

să se determine momentele de inerţie axiale J_x, J_y, J_z, momentele centrifugale J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} şi momentul de inerţie polar J_O.

Observaţii : i) [x] simbolizează partea întreagă a numărului real x;
ii) Se vor folosi următoarele unităţi de măsură: *cm* – pentru lungimi şi *kg* – pentru mase.

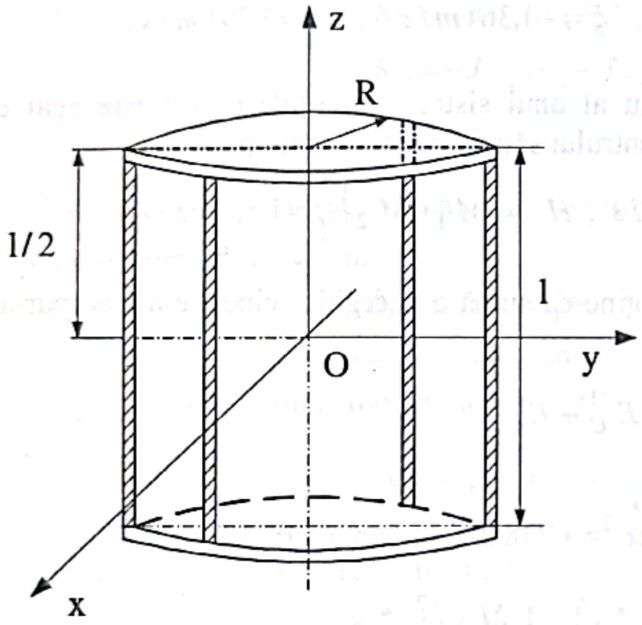


Figura VIII 3

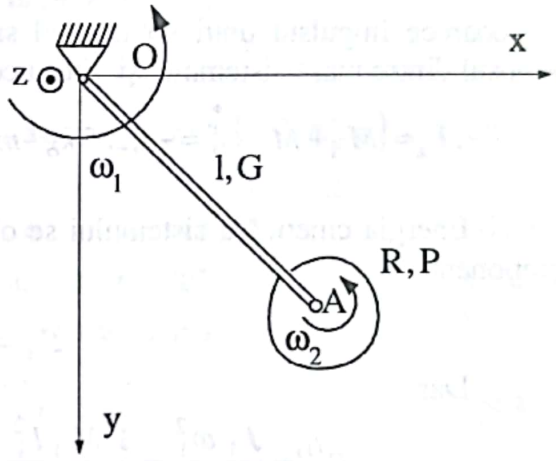


Figura VIII 4

VIII 4) O bară de lungime l şi greutate G, articulată în O, se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω_1 în jurul unei axe (Δ) perpendiculară în O pe planul mecanismului (figura VIII 4). În A bara este articulată de un disc de rază R şi greutate P care se roteşte (faţă de bară) cu viteza unghiulară constantă ω_2. Ştiind că:

$$l=1+0{,}1\cdot\left[\frac{n}{5}\right],\ R=0{,}3+0{,}05\cdot\left[\frac{n}{3}\right],\ G=100+25\cdot\left[\frac{n}{15}\right],\ P=40+20\cdot\left[\frac{n}{10}\right],$$

$$\omega_1=2+0{,}15\cdot\left[\frac{n}{12}\right],\ \omega_2=5+0{,}3\cdot\left[\frac{n}{8}\right],$$

să se determine energia cinetică a sistemului şi momentul cinetic al acestuia în raport cu axa (Δ).

Observaţii : i) [x] simbolizează partea întreagă a numărului real x;
ii) Se vor folosi următoarele unităţi de măsură: *m* – pentru lungimi, *N* – pentru greutăţi şi *rad/s* – pentru viteze unghiulare.

Scanned with OKEN Scanner

Teste de examen

Testul nr. 1

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Momentul unei forţe în raport cu un punct. Definiţie şi proprietăţi.
2. **(1 pct.)** Ce se înţelege printr-o legătură şi câte tipuri de legături (fără frecare) cunoaşteţi la un rigid?
3. **(1 pct.)** Daţi expresia acceleraţiei Coriolis din mişcarea relativă a punctului material.
4. **(1 pct.)** Definiţi mişcarea de rotaţie a solidului rigid.

II. (6 pct.)

5. (1 pct.) Să se determine coordonatele centrului de masă pentru placa plană şi omogenă din figura 1.1 (dimensiunile sunt date în cm).

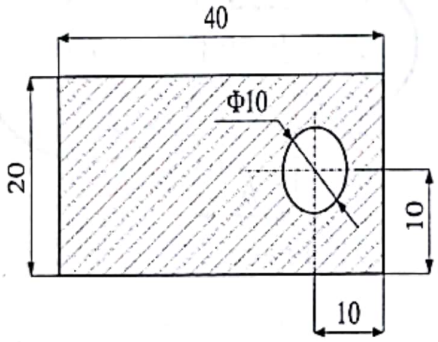


Figura 1.1

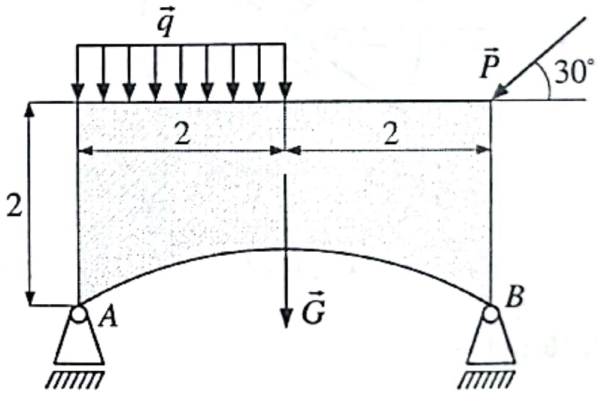


Figura 1.2

6. (2 pct.) Asupra plăcii plane şi omogene din figura 1.2 , de greutate G = 2000 daN, acţionează forţa concentrată P = 500 daN şi forţa uniform distribuită q = 250 dan/m. Dimensiunile sunt date în metri. Să se determine reacţiunile în articulaţia A şi reazemul B.

7. (1 pct.) Se dau ecuaţiile parametrice ale mişcării unui punct material în coordonate carteziene:

$$x = 3t^2 - 3t + 7 \quad , \quad y = 4t + 1$$

unde timpul t este dat în secunde iar coordonatele x şi y în metri. Să se determine viteza punctului material la momentul de timp t = 1s.

8. (2 pct.) Un disc de rază R se roteşte cu viteza unghiulară constantă ω în jurul unei axe care trece prin centrul său şi este perpendiculară pe planul discului (figura 1.3). Pe un

Scanned with OKEN Scanner

diametru al discului se mişcă, plecând din centrul său, un punct M după legea $s = R\sin \omega t$.

Sa se determine viteza absoluta a punctului M la momentul de timp $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$.

Testul nr. 2

I. (6 pct.)

1. **(2 pct.)** Torsorul unui sistem de forţe oarecare. Definiţie şi proprietăţi.
2. **(1 pct.)** Ce se înţelege prin reazem simplu ? Câte grade de libertate are un rigid cu un reazem simplu? Cu ce se înlocuieşte un reazem simplu (în cazul fără frecare) ?
3. **(2 pct.)** Mişcarea de translaţie a solidului rigid: definiţie, distribuţia de viteze şi acceleraşii.
4. **(1 pct.)** Definiţi mişcarea absolută, mişcarea relativă şi mişcarea de transport în cazul unui punct material.

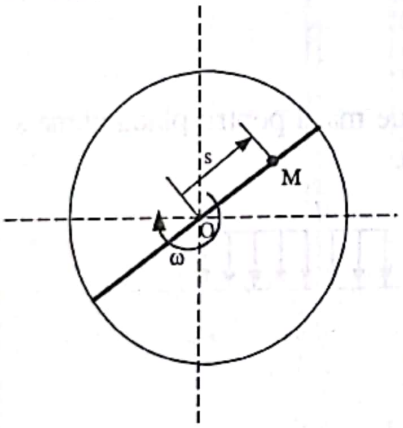


Figura 1.3

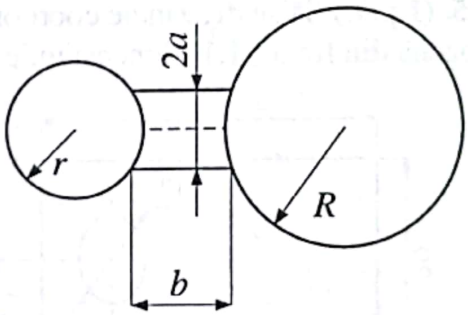


Figura 2.1

II. (6 pct.)

5. (1 pct.) Dintr-o sârmă groasă se construieşte corpul din figura 2.1. Să se determine poziţia centrului de masă dacă r = 10 cm, R = 20 cm, a = 3 cm şi b = 10 cm.

6. (2 pct.) Asupra barei AB, de lungime $l = 3m$ şi greutate $G = 600\,daN$, acţionează forţa $F = 400\,daN$, aplicată în B perpendicular pe bară, şi momentul $M = 500\ daN \cdot m$. Bara este încastrată în A (figura 2.2). Stiind că $\alpha = 60^0$, să se determine reacţiunile $\left(\vec{R}_A, \vec{M}_A\right)$ în incastrarea A.

7. (2 pct.) O bară OL se roteşte în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară constantă $\omega = 2\,rad/s$ şi mişcă inelul M pe o sârmă fixă aflată la distanţa l = 10 cm de punctul O (figura 2.3). Să se exprime viteza şi acceleraţia inelului M în funcţie de distanţa O'M = s.

Scanned with OKEN Scanner

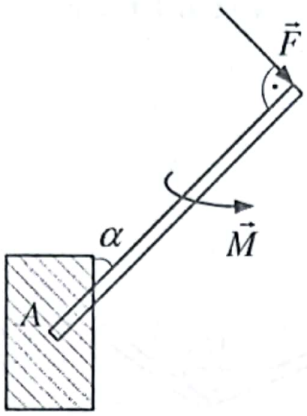


Figura 2.2

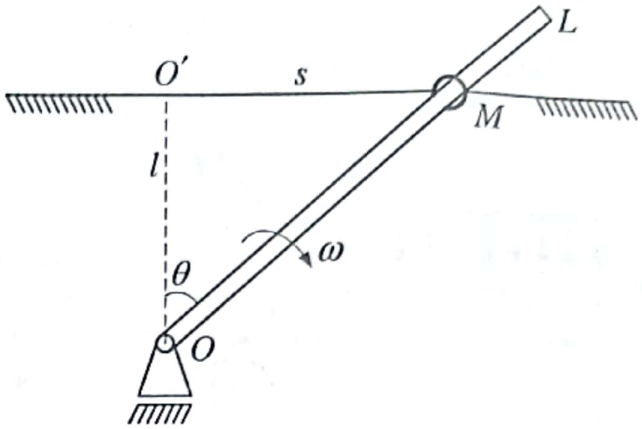


Figura 2.3

8. (1 pct.) Placa dreptunghiulară OABC (OA = 3 dm, OC = 4 dm) se roteşte în planul său, în jurul punctului O cu viteza unghiulară constantă $\omega = 2\,rad/s$ (figura 2.4). Care este viteza punctului B?

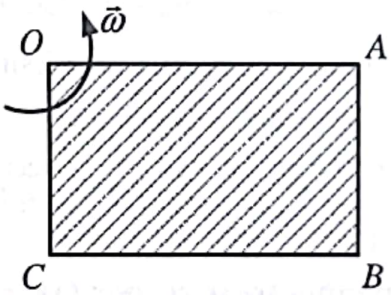


Figura 2.4

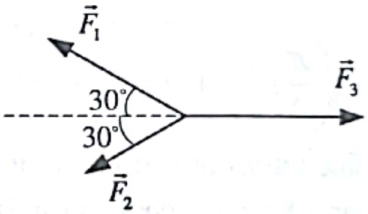


Figura 3.1

Testul nr. 3

I. (6 pct.)

1. **(2 pct.)** Cazuri de reducere ale unui sistem de forţe oarecare.
2. **(1 pct.)** Ce înţelegeţi prin articulaţie sferică? Câte grade de libertate are un solid rigid ce are ca legătură o articulaţie sferică ? Cu ce se înlocuieşte o astfel de legătură?
3. **(1 pct.)** Definiţi mişcarea circulară a punctului material.
4. **(2 pct.)** Mişcarea plan-paralelă a solidului rigid: definiţie, distribuţia de viteze..

II. (6 pct.)

5. **(1 pct.)** Să se determine modulul forţei $\vec{F}_3$ astfel încât sistemul de forţe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ din figura 3.1 să fie în echilibru. Se cunosc $F_1 = F_2 = 10\sqrt{3}\ N$.

6. **(2 pct.)** Se consideră bara de greutate neglijabilă din figura 3.2, solicitată de momentul $M = 150\,kN \cdot m$, forţa $P = 100\,kN$ şi sarcina uniform distribuită $q = 50\,kn/m$.

Scanned with OKEN Scanner

Stiind că $\alpha = 60^0$ şi că dimensiunile sunt date în metri, să se determine reacţiunile în reazemul B şi articulaţia A.

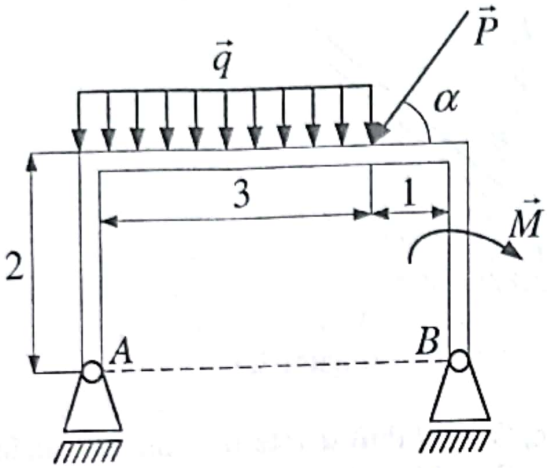


Figura 3.2

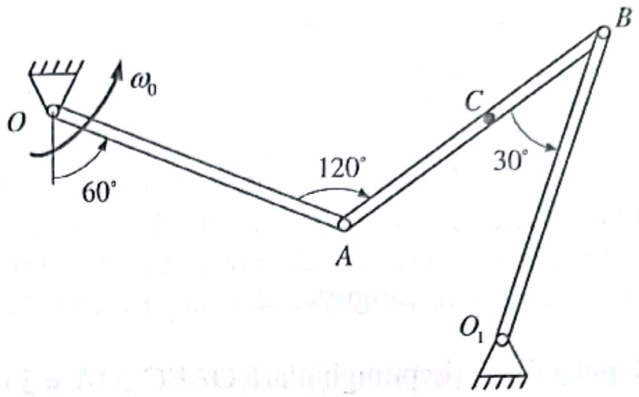


Figura 3.3

7. (1 pct.) Punctul M se deplasează în planul Oxy după legile $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, $y = -3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 4$, unde coordonatele x şi y sunt date în metri iar timpul t în secunde. Să se determine viteza punctului la momentul de timp $t_1 = 3\,s$.

8. (2 pct) Se consideră mecanismul din figura 3.3 pentru care se cunosc: OA = 30 cm, AB = 60 cm, AC = BC, $\omega_0 = 2$ rad/s. Să se determine vitezele punctelor A, B şi C şi vitezele unghiulare în mişcarea plan-paralelă a barei AB şi miscarea de rotaţie a manivelei O_1B.

Testul nr. 4

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Centrul de masă al unui sistem de puncte materiale şi al unui solid rigid.
2. **(1 pct.)** Definiţi noţiunea de moment al unei forţe în raport cu un punct.
3. **(1 pct.)** Ce componente are viteza şi acceleraţia unui punct material într-un sistem de coordonate carteziene Oxyz?.
4. **(1 pct.)** Definiţi mişcarea plan-paralelă a solidului rigid..

II. (6 pct.)

5. (2 pct.) Trei forţe de module $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = P$ sunt aplicate asupra vârfurilor D, O şi E ale unui paralelipiped dreptunghic (figura 4.1). Să se reducă sistemul de forţe în raport cu punctul O dacă $AB = AD = a$, $OA = 2a$.

Scanned with OKEN Scanner

6. (1 pct.) Un corp de greutate G = 100 daN este suspendat prin intermediul a două fire inextensibile, orientate ca în figura 4.2. Să se determine tensiunile din fire.

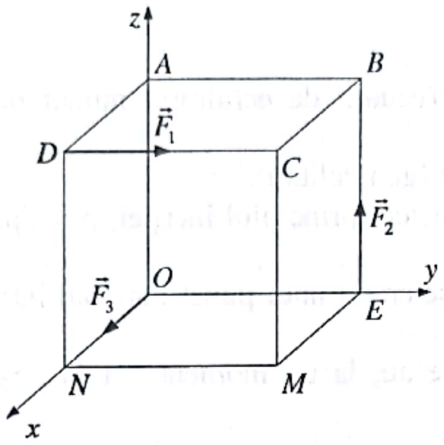


Figura 4.1

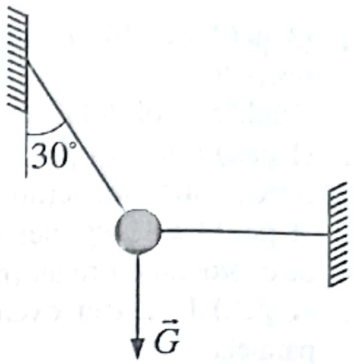


Figura 4.2

7. (1 pct.) Un punct material se deplasează pe un cerc de rază R = 4 m după legea $s = 4{,}5t^3$, unde s este dat în metri iar timpul t în secunde. Să se determine modulul acceleraţiei la momentul de timp la care modulul vitezei este $v_1 = 6\ m/s$.

8. (2 pct.) Un cărucior se deplasează pe un drum rectiliniu cu viteza constantă $\left|\vec{v}_1\right| = u$. Pe cărucior este montat un tub OA având forma unei parabole de ecuaţie $y = \frac{1}{2}x^2$ (figura 4.3). În interiorul tubului se mişcă cu viteza constantă $\left|\vec{v}_2\right| = 2u$ un punct material M. Să se determine viteza absolută a punctului M la momentul de timp la care acesta trece prin punctul de abscisă $x = 3$.

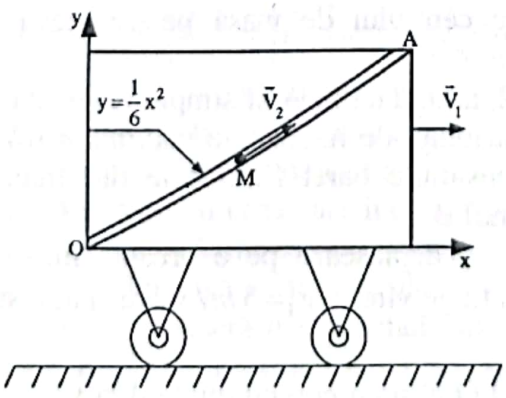


Figura 4.1

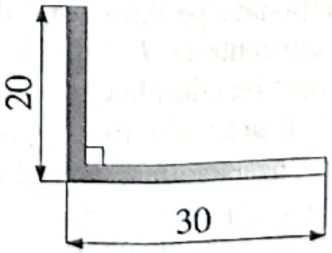


Figura 5.1

Scanned with OKEN Scanner

Testul nr. 5

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Echilibrul solidului rigid liber (ecuaţii de echilibru, număr de grade de libertate).
   Echilibrul solidului rigid supus la legături (generalităţi).
2. **(1 pct.)** Enunţaţi principiile mecanicii clasice (principiul inerţiei, principiul acţiunii forţei, principiul acţiunii şi reacţiunii).
3. **(1 pct.)** Ce componente are viteza şi acceleraţia unui punct material într-un sistem de coordonate Frenet (naturale) ?
4. **(1 pct.)** Daţi trei exemple de corpuri ce au, la un moment dat, o mişcare plan-paralelă.

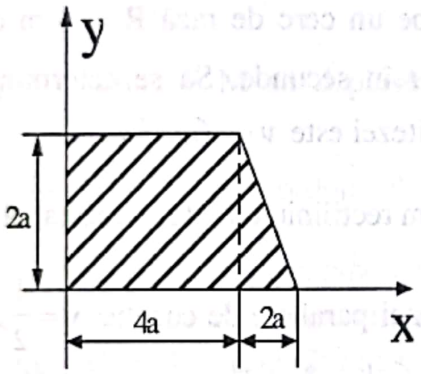


Figura 5.1

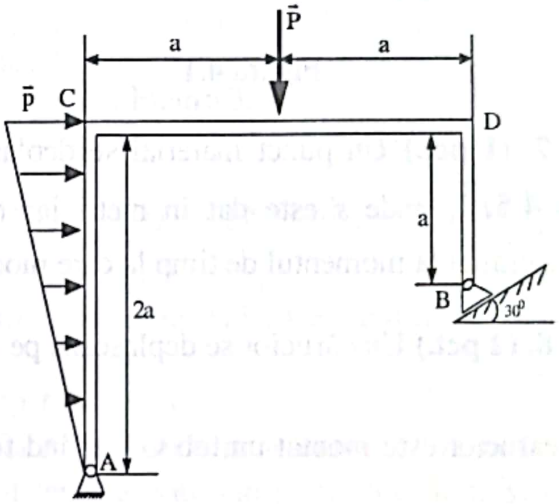


Figura 5.2

II. (6 pct.)

5. (1 pct.) Să se determine coordonatele centrului de masă pentru placa plană şi omogenă din figura 5.1 (în funcţie de a).

6. (2 pct.) Se consideră bara din figura 5.2, articulată în A şi simplu rezemată în B. Ea este acţionată pe latura AC de forţa liniar distribuită de intensitate maximă *p (N/m)* şi de forţa concentrată *P (N)* în punctul E. Dimensiunile barei fiind cele din figură, să se determine reacţiunile din articulaţia A şi reazemul B.

7. (1 pct.) Un mobil plecând din repaus se deplasează pe o dreaptă într-o mişcare uniform accelerată. Ştiind că după $t_1 = 10\,s$ el atinge viteza $v_1 = 5\,m/s$, ce spaţiu străbătuse el după $t_0 = 1\,s$?

8. (2 pct.) Un punct M porneşte din vârful O al unui con cu unghiul la vârf 2α şi se mişcă pe o generatoare a conului cu viteza $\vec{u}$ constantă.. În acelaşi timp, conul se roteşte în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă $\vec{\omega}$ (figura 5.3). Care este viteza absolută a punctului M după *t* secunde de la începutul mişcării?

Scanned with OKEN Scanner

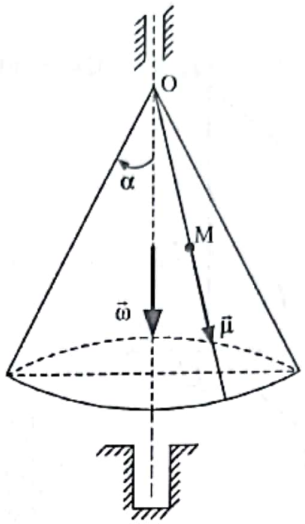


Figura 5.3

Testul nr. 6

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Echilibrul solidului rigid supus la legături fără frecare. Reazemul simplu, articulaţia, încastrarea.
2. **(1 pct.)** Ce tipuri de forţe acţionează pe un corp izolat dintr-un sistem de corpuri şi ce principiu al mecanicii clasice trebuie respectat obligatoriu la izolarea lui?
3. **(1 pct.)** Definiţi noţiunea de traiectorie a unui punct material.
4. **(1 pct.)** Ce componente are viteza absolută şi acceleraţia absolută în mişcarea relativă a unui punct material?

II. (6 pct.)

5. (2 pct.) Asupra cubului rigid de latură $a = 20$ cm din figura 6.1 acţionează cinci forţe de module $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_3\right| = 1\,daN$ şi $\left|\vec{F}_4\right| = \left|\vec{F}_5\right| = 2\,daN$. Să se determine momentul rezultant în raport cu punctul O.

6. (1 pct.) Să se determine poziţia centrului de masă pentru placa plană şi omogenă din figura 6.2. Dimensiunile sunt date în cm.

7. (1 pct.) Acul unui ceas care indică minutele este de 1,5 ori mai lung decât acul care indică orele. Să se calculeze raportul dintre viteza liniară a vârfului acului care indică minutele şi viteza liniară a vârfului acului care indică orele.

8. (2 pct.) Se consideră mecanismul din figura 6.3 pentru care se cunosc OA = 20 cm, AB = 60 cm, $\omega_0 = 1{,}2$ rad/s, BC = 30 cm. Să se determine vitezele punctelor A, B şi C şi viteza unghiulara în mişcarea plan-paralelă a barei AB.

Scanned with OKEN Scanner

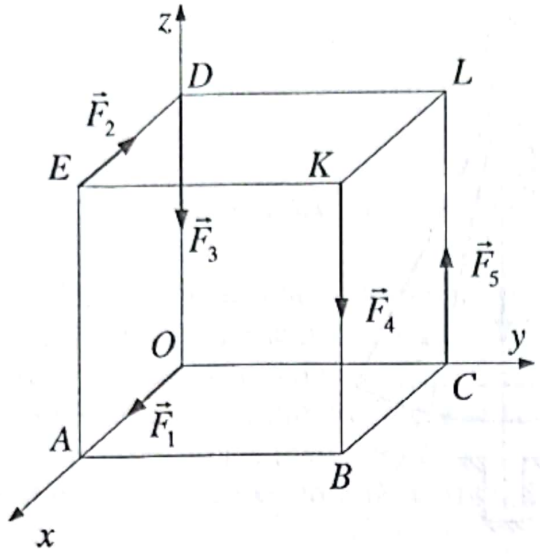


Figura 6.1

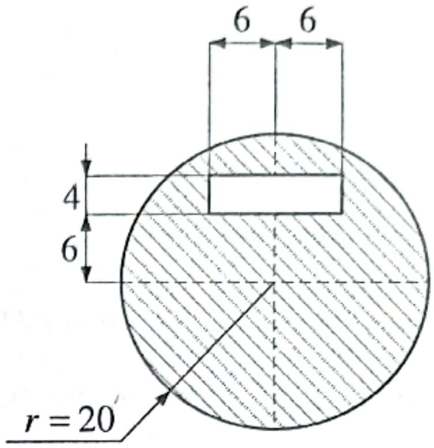


Figura 6.2

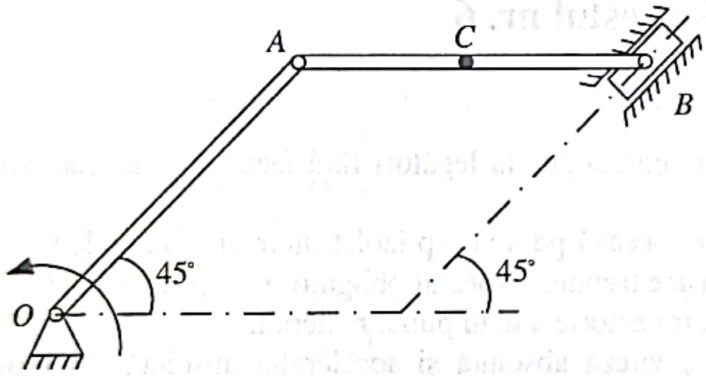


Figura 6.3

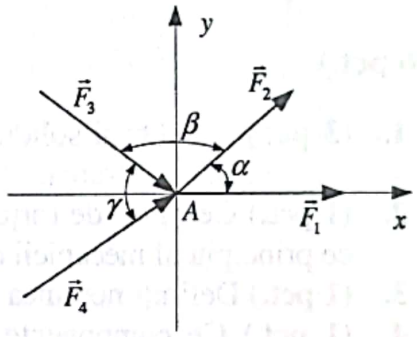


Figura 7.1

Testul nr. 7

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Echilibrul sistemelor de puncte materiale şi de solide rigide. Condiţii de echilibru. Teoreme şi metode utilizate pentru rezolvarea problemelor de statica sistemelor.
2. **(1 pct.)** Definiţi noţiunile de cuplu de forţe şi de moment al unui cuplu de forţe.
3. **(1 pct.)** Definiţi mişcarea de translaţie a solidului rigid.
4. **(1 pct.)** Ce ştiţi despre viteza şi acceleraţia unui punct material într-o mişcare circulară a acestuia?

II. (6 pct.)

5. (1 pct.) Se consideră sistemul de forţe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ şi $\vec{F}_4$ concurente în A (figura 7.1). Să se determine rezultanta lor, dacă:

$$F_1 = F_4 = 100\,N,\ F_2 = 120\,N,\ F_3 = 80\,N, \alpha = 45^0,\ \beta = 105^0,\ \gamma = 60^0$$

Scanned with OKEN Scanner

6. (2 pct.) Sa se determine coordonatele centrului de masă pentru bara omogenă din figura 7.2 dacă $AB = a$, $BD = \frac{a}{2}$ iar porţiunea semircirculară DKO are raza $R = a$.

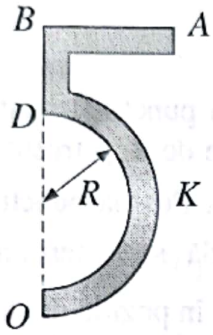


Figura 7.2

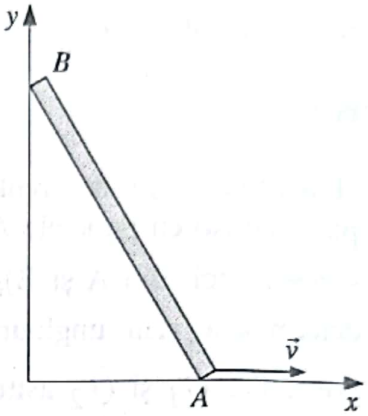


Figura 7.3

7. (1 pct.) Bara AB, de lungime l, alunecă cu extremităţile sale A şi B după direcţiile Ox şi Oy, astfel încât punctul A se deplasează cu viteza constantă v. Să se determine viteza punctului B la momentul de timp la care $OA = \frac{l}{2}$ (figura 7.3).

8. (2 pct.) Se consideră mecanismul din figura 7.4 pentru care se cunosc: OA = 22 cm, AB = 36 cm, $\omega_0 = 2{,}4$ rad/s, AD = 72 cm, BC = 25 cm. Să se determine vitezele punctelor A, B, D şi C şi vitezele unghiulare în mişcarea plan-paralelă a barelor AD şi BC.

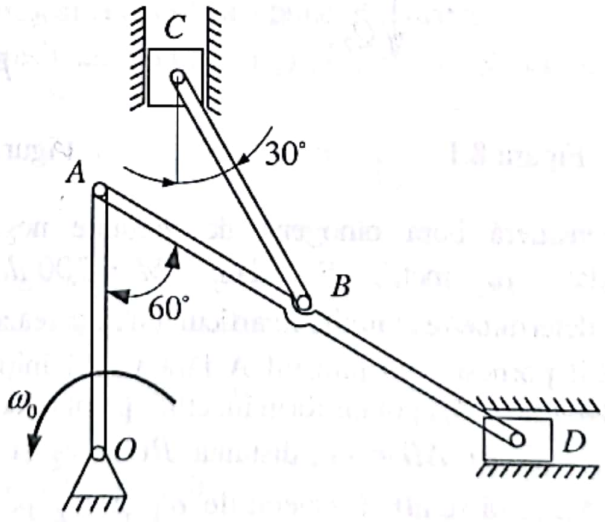


Figura 7.4

Testul nr. 8

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Cinematica mişcării absolute a punctului material. Noţiunile de traiectorie, viteză şi acceleraţie.

Scanned with OKEN Scanner

2. **(1 pct.)** Daţi relaţia de calcul a vectorului de poziţie al centrului de masă al unui sistem de puncte materiale şi al unui solid rigid.
3. **(1 pct.)** Definiţi mişcarea rectilinie a punctului material.
4. **(1 pct.)** Scrieţi formulele lui Euler pentru distribuţia de viteze şi acceleraţii în mişcarea generală a solidului rigid.

II. (6 pct.)

5. **(1 pct.)** O lampă de greutate $\vec{G}$ este suspendată într-un punct O situat în acelaşi plan vertical cu punctele A şi B. De două fire fixe legate de O şi trecute peste doi scripeţi mici (din A şi B), atârnă greutăţile $\vec{Q}_1$ şi $\vec{Q}_2$. Poziţia punctului O este determinată prin unghiurile α şi β (figura 8.1). Să se determine valorile greutăţilor $\vec{Q}_1$ şi $\vec{Q}_2$ astfel ca lampa să rămână în repaus în poziţia din figură.

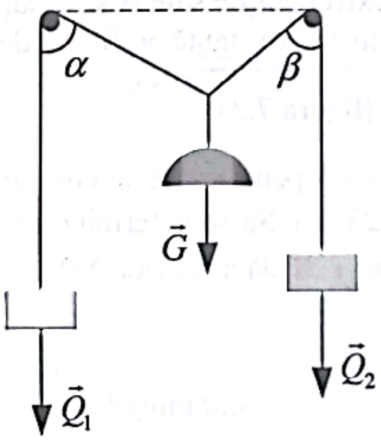


Figura 8.1

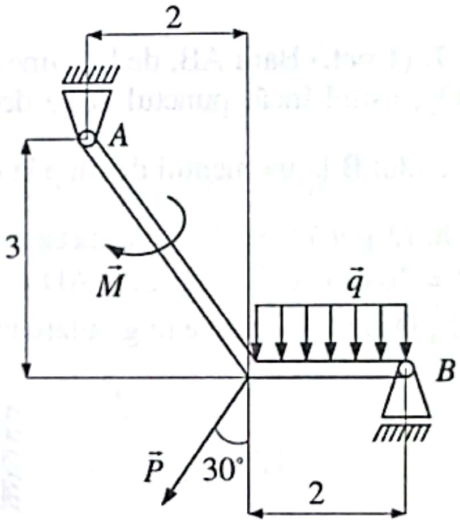


Figura 8.2

6. (2 pct.) Se consideră bara omogenă de greutate neglijabilă din figura 8.2. Dimensiunile sunt date în metri. Se dau: $M = 200\,daN \cdot m$, $P = 100\,daN$, $q = 50\,daN/m$. Să se determine reacţiunile în articulaţia A şi reazemul B.

7. (1 pct.) Un mobil porneşte din punctul A fără viteză iniţială şi se mişcă uniform accelerat pe panta AB (figura 8.3), apoi uniform încetinit pe plan orizontal până la oprirea în punctul C. Cunoscând lungimea $AB = x_1$, distanţa $BC = x_2$ şi timpul t în care mobilul parcurge tot parcursul ABC, să se afle acceleraţiile a_1 şi a_2 pe porţiunile AB, respectiv BC.

8. (2 pct.) Mobilul M se deplasează la periferia discului D de raza R după legea $s = A\overset{\frown}{M} = \pi t^2$ (figura 8.4). Discul este articulat în A şi B cu manivelele O_1A şi O_2B care se rotesc în jurul punctelor O_1, respectiv O_2 după legea $\varphi = \frac{5\pi t^3}{48}$ (radiani). Se cunosc: $O_1A = O_2B = 20\,cm$, $R = 16\,cm$. Să se determine viteza absolută a punctului M la momentul de timp $t = 2\,s$.

Scanned with OKEN Scanner

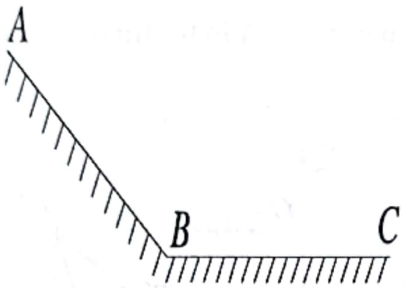


Figura 8.3

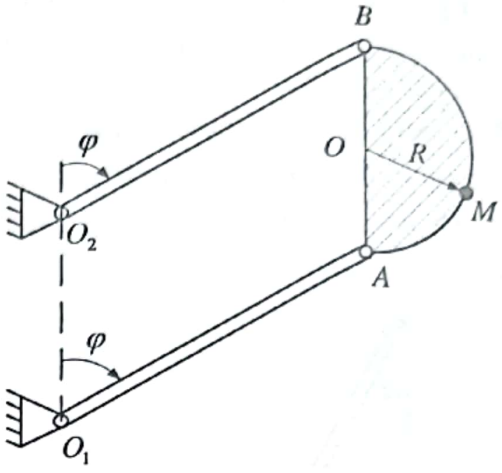


Figura 8.4

Testul nr. 9

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Cinematica mişcării absolute a solidului rigid. Mişcarea generală (parametrii de poziţie, formulele lui Poisson şi ale lui Euler).
2. **(1 pct.)** Enunţaţi trei proprietăţi ale centrului de masă al unui sistem de puncte materiale sau al unui solid rigid.
3. **(1 pct.)** Definiţi mişcarea circulară a punctului material.
4. **(1 pct.)** Ce expresii au vectorii $\vec{v}_O, \vec{a}_O, \vec{\omega}$ şi $\vec{\varepsilon}$ în mişcarea de translaţie a solidului rigid?

II. (6 pct.)

5. (1 pct.) Un sistem de forţe oarecare se reduce la o forţă unică, egală cu rezultanta $\vec{R}$, şi care acţionează pe axa centrală a sistemului dacă elementele torsorului de reducere $\tau_O\left(\vec{R}, \vec{M}_O\right)$ în raport cu punctul arbitrar O verifică condiţiile:

a) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$; b) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{R} \cdot \vec{M}_O = 0$; c) $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$;
d) $\vec{R} \,//\, \vec{M}_O$.

6. (2 pct.) Se consideră o bară omogenă AB, de lungime $l = 5$ m şi greutate G = 180 N, articulată în A şi simplu rezemată în D (figura 9.1). De capătul B, prin intermediul unui fir, atârnă greutatea P = 360 N, firul făcând cu direcţia barei unghiul $\beta = 30^0$. Să se determine reacţiunile din articulaţia A şi reazemul D, dacă $\alpha = 30^0$ şi $ED = l_0 = 1{,}5$ m.

Scanned with OKEN Scanner

7. (1 pct.) Punctul M se deplasează în planul Oxy după legile $x = 3t$, $y = 4t^2 + 1$. Să se determine traiectoria punctului, precum şi componentele vectorilor viteză şi acceleraţie la un moment oarecare de timp t.

8. (2 pct.) Roata de curea a unui electromotor se roteşte cu 1500 rot/min. După $t_1 = 2$ min curentul a fost întrerupt şi roata, rotindu-se într-o mişcare uniform încetinită, s-a oprit după $t_2 = 6$ s. Să se determine numărul de rotaţii efectuat de roată în tot timpul mişcării.

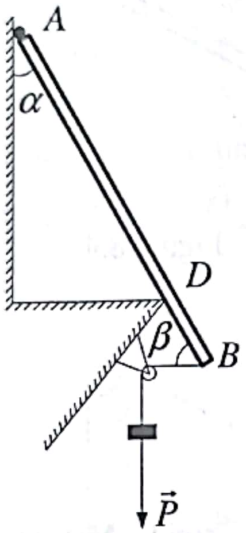


Figura 9.1

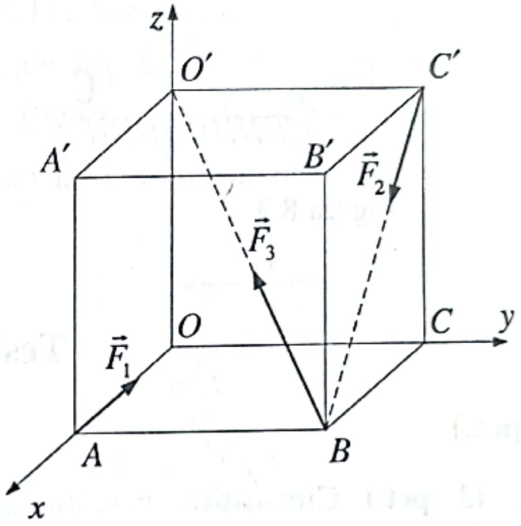


Figura 10.1

Testul nr. 10

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Mişcarea de rotaţie a solidului rigid: definiţie, distribuţia de viteze şi acceleraţii, proprietăţi.
2. **(1 pct.)** Ce teoreme şi metode pentru rezolvarea problemelor de statica sistemelor cunoaşteţi?
3. **(1 pct.)** Cum apare şi cum se manifestă (ce introduce) frecarea de alunecare?
4. **(1 pct.)** Enunţaţi axioma legăturilor.

II. (6 pct.)

5. (2 pct.) Asupra unui paralelipiped dreptunghic de laturi OA = 30 cm, OC = 50 cm şi OO' = 40 cm acţionează un sistem de trei forţe ca în figura 10.1. Cunoscând că $F_1 = 10\ daN$, $F_2 = 5\sqrt{34}\ daN$ şi $F_3 = 20\sqrt{2}\ daN$, să se determine momentul rezultant în raport cu punctul O.

6. (2 pct.) Să se determine coordonate centrului de masă al plăcii plane omogene din figura 10.2. Se cunosc: AB = 20 cm, BD = 24 cm, ED = 10 cm, AN = 2 cm, NL = 18 cm, LK = 20 cm, FK = 8 cm.

Scanned with OKEN Scanner

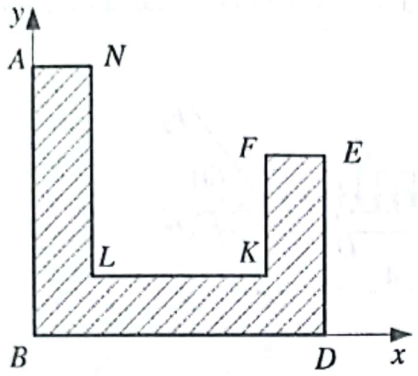


Figura 10.2

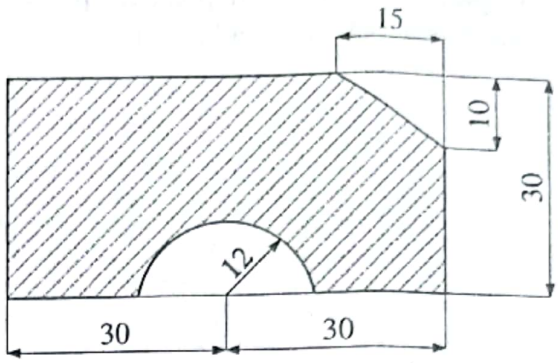


Figura 11.1

7. (1 pct.) Un mobil se deplasează în linie dreaptă după legea $x = t^3 - 4t^2 + 10t + 1$, unde coordonata x este exprimată în metri iar timpul t în secunde. Să se afle viteza şi acceleraţia mobilului la momentele de timp $t_1 = 1\,s$ şi $t_2 = 2\,s$. Să se construiască diagrama vitezei (graficul $v = v(t)$. Care este viteza minimă?

8. (1 pct.) Arborele unei maşini se roteşte uniform la turaţia n = 900 rot/min. Care este viteza unghiulară în mişcarea de rotaţie a arborelui (in rad/s)?

Testul nr. 11

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Mişcarea plan-paralelă a solidului rigid: definiţie, distribuţia de viteze, proprietăţi.
2. **(1 pct.)** Cand apare şi ce efecte are frecarea firelor? Care este formula lui Euler pentru frecarea firelor?
3. **(1 pct.)** In ce caz de reducere un sistem de forţe oarecare este echivalent cu un torsor minimal şi ce componente are acesta?
4. **(1 pct.)** Definiţi noţiunile de viteză medie şi de viteză (instantanee) a unui punct material. Ce puteţi spune despre direcţia vectorului viteză (instantanee)?

II. (6 pct.)

5. (1 pct.) Să se determine coordonatele centrului de masă pentru placa plană omogenă din figura 11.1. Dimensiunile sunt date în cm.

6. (2 pct.) Se consideră sistemul de trei bare din figura 11.2, încastrate în A, articulate în B şi D şi simplu rezemate în C şi F. Se cunosc: $P_1 = 12\,kN$, $P_2 = 12\,kN$, $M = 50\,kN \cdot M$, $q = 2\,kN/m$. Să se determine reacţiunile în A, B, C, D şi E. Dimensiunile pe figură sunt date în metri.

7. (2 pct.) O placă pătrată ABCD de latură l = 1 m se roteşte în planul ei în jurul centrului O. Să se determine şi să se reprezinte vitezele şi acceleraţiile vârfurilor A, B, C şi D, ştiind că viteza unghiulară este constantă şi egală cu $\omega = 4\,rad/s$.

Scanned with OKEN Scanner

8. (1 pct.) Un mobil se deplasează pe un cerc de rază R = 10 m cu viteza constantă v = 3 m/s. Care este acceleraţia mobilului?.

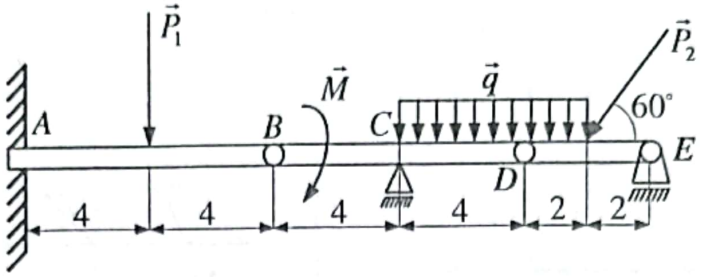


Figura 11.2

Testul nr. 12

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Mişcarea plan-paralelă a solidului rigid: definiţie, distribuţia de acceleraţii, proprietăţi.
2. **(1 pct.)** Ce ştiti despre frecarea în articulaţii şi lagăre?
3. **(1 pct.)** În ce constă metoda izolării corpurilor şi care sunt etapele de aplicare a ei?
4. **(1 pct.)** Definiţi noţiunile de acceleraţie medie şi de acceleraţie (instantanee) a unui punct material.

II. (6 pct.)

5. **(2 pct.)** Se consideră bara AB = l = 4 m de greutate G = 0,4 kN, încastrată în A. La capătul B al barei atârnă greutatea P = 1 kN. Să se determine reacţiunile în încastrarea A (figura 12.1).

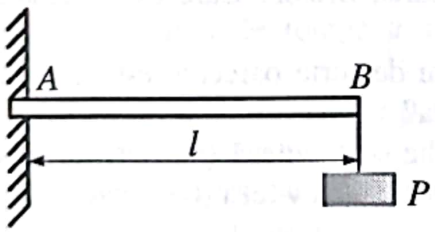


Figura 12.1

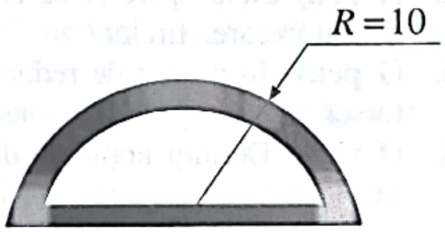


Figura 12.2

6. **(1 pct.)** Sa se determine coordonatele centrului de masă pentru bara omogenă din figura 12.2.

7. **(1 pct.)** Mecanicul unui tren care se deplasează uniform cu viteza $v_1 = 90\,km/h$ observă un alt tren care se deplasează pe aceiaşi linie şi în acelaşi sens cu viteza $v_2 = 54\,km/h$. Cu ce acceleraţie trebuie să frâneze mecanicul primului tren pentru a nu produce accident, dacă distanţa dintre trenuri, în momentul începerii frânării este d = 200 m?

8. **(2 pct.)** Un triunghi dreptunghic isoscel OBA se roteşte în planul său în jurul vârfului O cu viteza unghiulară constantă $\omega = 2\pi$ rad/s (figura 12.3). Un punct M se

Scanned with OKEN Scanner

deplasează pe latura AB cu viteza constantă u, parcurgând distanţa AB = a = 10 cm în timpul unei rotaţii complete a triunghiului. Să se determine viteza absolută a punctului M în momentul în care se află în A.

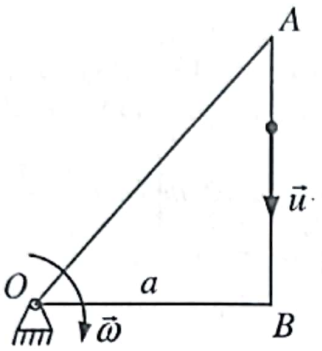


Figura 12.3

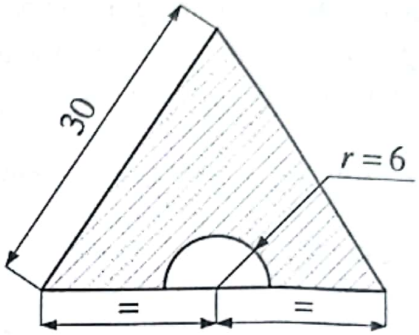


Figura 13.1

Testul nr. 13

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Cinematica mişcării relative a punctului material. Determinarea distribuţiei de viteze şi acceleraţii.
2. **(1 pct.)** Ce reprezintă axa centrală a unui sistem de forţe oarecare? Scrieţi ecuaţiile axei centrale în cazul cel mai general.
3. **(1 pct.)** Daţi trei exemple de corpuri care efectuează o mişcare de rotaţie.
4. **(1 pct.)** De ce la viraje şoferul micşorează viteza autovehiculului?

II. (6 pct.)

5. (1 pct.) Să se determine coordonatele centrului de masă pentru placa plană şi omogenă din figura 13.1

6. (2 pct.) Asupra cubului OABCDEFG de latură a = 10 cm din figura 13.2 acţionează un sistem de două forţe, având punctele de aplicaţie, direcţiile şi sensurile din figură şi modulele $F_1 = 5\ N$, $F_2 = 10\sqrt{2}\ N$. Să se determine momentul rezultant al sistemului celor două forţe în raport cu punctul O.

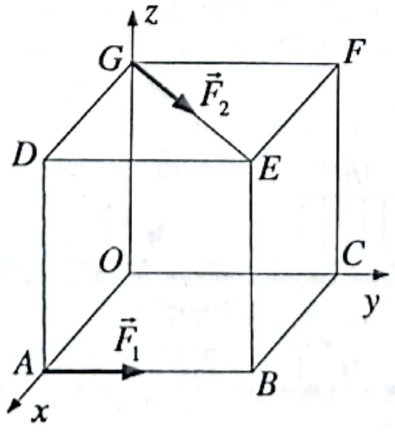


Figura 13.2

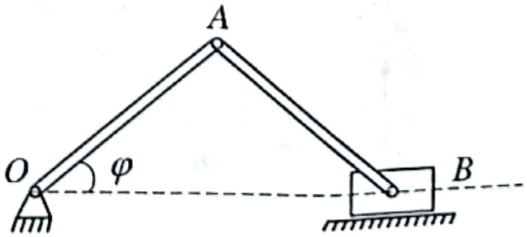


Figura 13.3

7. (1 pct.) Un avion zboară orizontal cu viteza constantă $v = 900$ km/h. Un observator, situat în O la sol, vede avionul în punctul A_1 sub unghiul $\alpha_1 = 30^0$ iar după $\Delta t = 10\,s$ sub unghiul $\alpha_2 = 60^0$, în A_2 (figura 13.3). Să se determine distanţa parcursă de avion pe orizontală în Δt şi înălţimea h la care zboară avionul.

8. (2 pct.) Se consideră mecanismul bielă-manivelă din figura 13.3. Manivela OA se roteşte în jurul punctului O după legea $\varphi = 3t$. Celelalte dimensiuni sunt: OA = r = 2 m, AB = l = 3,46 m. Să se determine, pentru momentul de timp în care $m\left(\hat{OAB}\right) = \frac{\pi}{2}$, viteza capului de cruce B.

Testul nr. 14

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Cinematica mişcării relative a solidului rigid. Compunerea vitezelor. Compuneri de mişcări instantanee.
2. **(1 pct.)** Câte grade de libertate are un punct material liber în spaţiu? Care ar putea fi parametrii scalari independenţi care să fixeze, la un moment dat, poziţia punctului în spaţiu?
3. **(1 pct.)** Daţi trei exemple de corpuri care efectuează o mişcare de translaţie.
4. **(1 pct.)** Scrieţi legile mişcării rectilinii şi uniforme şi rectilinii uniform variate a punctului material (legea spaţiului, a vitezei şi a acceleraţiei).

II. (6 pct.)

5. (1 pct.) Se consideră prisma rigidă din figura 8.1, asupra căreia acţionează forţele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_6$ orientate ca în figură şi egale în mărime, $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = ... = |\vec{F}_6| = P$. Să se determine forţa rezultantă $\vec{R} = \sum_{i=1}^{6} \vec{F}_i$.

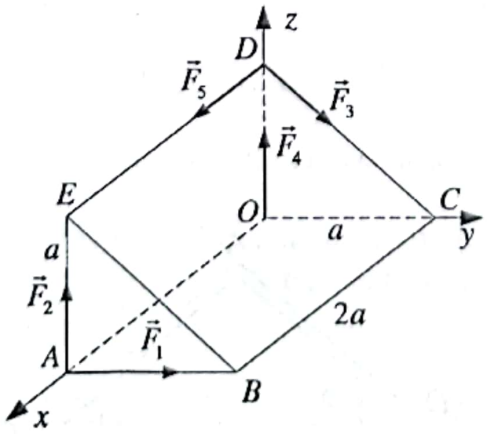


Figura 14.1

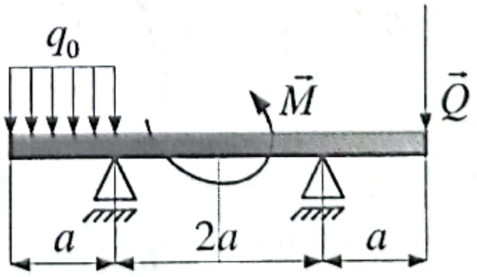


Figura 14.2

Scanned with OKEN Scanner

6. (2 pct.) Se consideră bara omogenă CD de greutate neglijabilă asupra căreia acţionează forţa concentrată Q, sarcina uniform distribuită q_0 şi momentul M. Bara este articulată în A şi simplu rezemată în B. Să se determine reacţiunile în A şi B dacă $Q = 4{,}6\ kN$, $q_0 = 4\ kN/m$, $M = 10\ kN \cdot m$, $a = 1\ m$ (figura 14.2).

7. (1 pct.) Un autoturism pornind din repaus se deplasează uniform variat şi atinge viteza v_1=10 m/s, iar după parcurgerea spaţiului s_2=140 m viteza devine v_2=18m/s. Să se determine acceleraţia cu care s-a deplasat mobilul.

8. (2 pct.) Bara AB se deplasează în plan vertical astfel încât capetele A şi B alunecă prin intermediul a două culise pe doi pereţi perpendiculari (figura 14.3). Cunoscând AB = 20 cm, AC = 6 cm şi v_A=10 cm/s, să se determine vitezele punctelor B şi C.

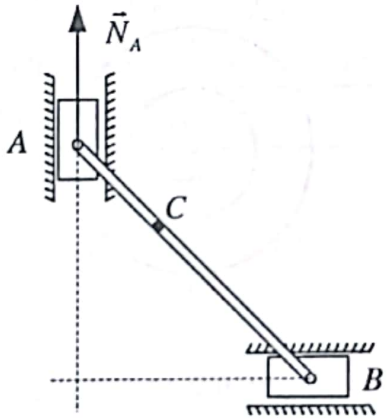


Figura 14.3

Testul nr. 15

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Dinamica mişcării absolute a punctului material.
2. **(2 pct.)** Daţi relaţiile de calcul pentru momentele de inerţie axiale şi centrifugale în cazul unei bare rectilinii şi omogene, de masă M şi lungime l, raportată la un sistem de axe carteziene Oxyz având originea în centrul de masă al barei şi axa Ox în lungul barei.
3. **(1 pct.)** Enunţaţi teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic în mişcarea unui sistem de puncte materiale sau solid rigid faţă de un punct fix.

II. (6 pct.)

4. **(1 pct.)** O forţă F = 40 N acţionează orizontal asupra unui corp de masă m = 8 kg aflat iniţial în

repaus pe o suprafaţă orizontală netedă. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forţa F în prima secundă.

Scanned with OKEN Scanner

5. **(1 pct.)** O piatră este aruncată pe verticală, de la nivelul solului, cu viteza $v_0 = 10\,m/s$. După cât timp va atinge din nou pământul?

6. **(4 pct.)** Se consideră sistemul de corpuri din figura 15.1, care porneşte din repaus sub acţiunea propriilor greutăţi. Discul de greutate Q şi rază R se poate deplasa pe un plan orizontal şi este legat prin intermediul unui fir flexibil şi inextensibil de un corp de greutate P, aflat pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală. Firul este înfăşurat pe discul de rază r al unui troliu şi se desfăşoară de pe discul de rază R al aceluiaşi troliu. Momentul de inerţie al troliului în raport cu axa de rotaţie este J.

Considerând că discul de greutate Q se rostogoleşte fără să alunece pe planul orizontal, coeficientul de frecare de rostogolire fiind s, iar corpul de greutate P se mişcă pe planul înclinat cu frecare, coeficientul frecării de alunecare fiind μ, să se studieze mişcarea greutăţii P şi să se determine acceleraţia sa.

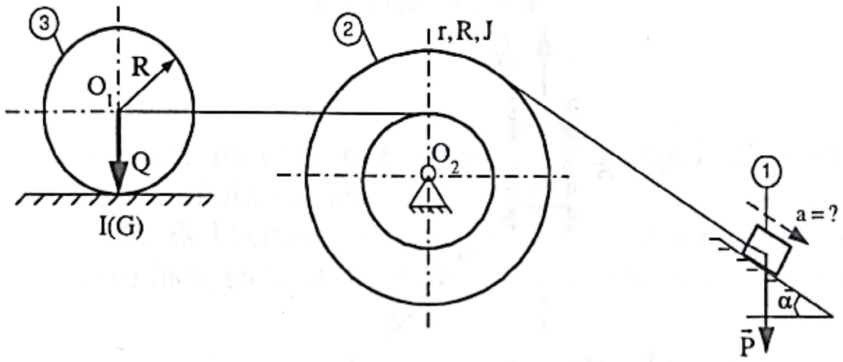


Figura 15.1

Testul nr. 16

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Dinamica mişcării relative a punctului material. Ecuaţia fundamentală a mişcării relative. Sisteme de referinţă inerţiale.
2. **(2 pct.)** Daţi relaţiile de calcul pentru momentele de inerţie axiale şi centrifugale în cazul unei plăci plane şi omogene raportată la un sistem de axe carteziene Oxyz având originea în centrul de masă al plăcii şi axele Ox, respectiv Oy, paralele cu laturile plăcii. Lungimea, respectiv lăţimea plăcii sunt a şi b iar masa sa M.
3. **(1 pct.)** Enunţaţi teorema momentului cinetic în mişcarea unui sistem de puncte materiale sau solid rigid în raport cu un reper fix.

II. (6 pct.)

4. **(1 pct.)** Asupra unui punct material acţionează trei forţe care au acelaşi modul şi care fac între ele unghiuri de 120^0. Ce acceleraţie i se va imprima punctului material?

5. **(2 pct.)** Un cilindru, având dimensiunile din figura 16.1 şi greutatea G = 5000 N, este aşezat pe un plan orizontal. Să se determine lucrul mecanic necesar răsturnarii cilindrului în jurul punctului A de intersecţie a unei generatoare cu planul orizontal.

Scanned with OKEN Scanner

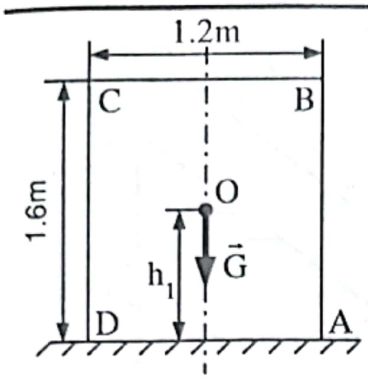


Figura 16.1

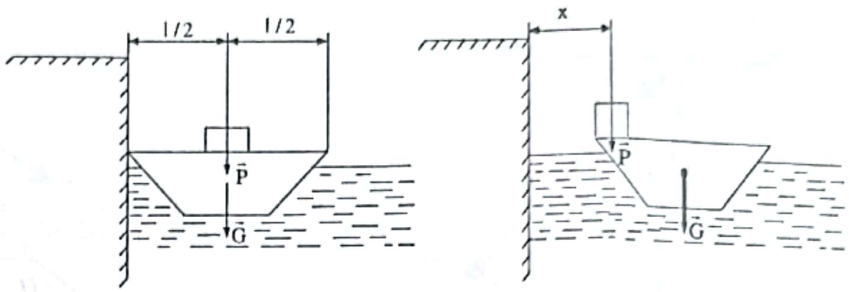


Figura 16.2

6. (3 pct.) O barcă de greutate $\vec{G}$ şi lungime l se găseşte în repaus şi atinge cu prova debarcaderul (figura 16.2). Un om de greutate $\vec{P}$ aflat în acest moment în mijlocul bărcii începe să se deplaseze spre mal. Să se determine distanţa cu care se va depărta barca de mal atunci când omul va ajunge la capătul bărcii.

Testul nr. 17

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Momente de inerţie mecanice. Definiţii (în cazul sistemelor de puncte materiale şi de solide rigide). Relaţii între momentele de inerţie.
2. **(2 pct.)** Daţi relaţiile de calcul a energiei cinetice a unui solid rigid în cazul mişcărilor de translaţie, rotaţie şi plan-paralelă.
3. **(1 pct.)** Enunţaţi teorema conservării energiei mecanice în mişcarea unui sistem de puncte materiale sau solid rigid faţă de un punct fix.

II. (6 pct.)

4. (1 pct.) Ce forţă de tracţiune este necesară pentru a imprima unui autovehicul cu masa $m = 9{,}5\ t$ o acceleraţie $a = 1{,}2\ m/s^2$, daca forţa de frecare reprezintă 5% din forţa de tracţiune dezvoltată?

5. (2 pct.) Un pendul este lăsat să oscileze liber în planul vertical, din poziţia iniţială dată prin unghiul θ_0 (figura 17.1). Cunoscând masa m a punctului material şi lungimea l a firului, să se determine perioada T a micilor oscilaţii.

6. (3 pct.) Punctul M, de masă m, se mişcă fără frecare pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală şi este atras de punctul O cu o forţă proporţională cu distanţa OM, coeficientul de proporţionalitate fiind $K = k \cdot m$, unde k este o constantă pozitivă (figura 17.2). Ştiind că la momentul iniţial punctul M se află în repaus în A şi că distanţa $AO = l$, se cer:

a) Legea de mişcare $AM = x(t)$ şi valoarea reacţiunii normale pe plan;
b) Viteza cu care mobilul ajunge în B.

Scanned with OKEN Scanner

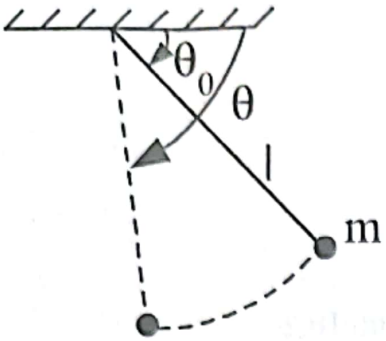


Figura 17.1

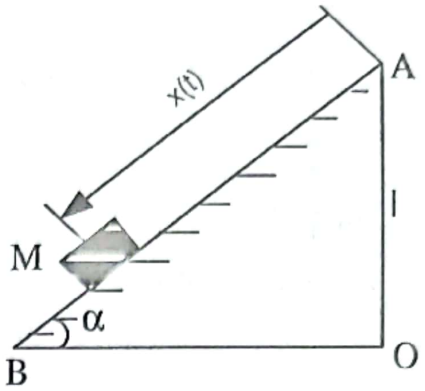


Figura 17.2

Testul nr. 18

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Variaţia momentelor de inerţie faţă de axe paralele. Teorema lui Steiner.
2. **(2 pct.)** Daţi relaţiile de calcul a momentului cinetic al unui solid rigid în cazul mişcărilor de translaţie şi rotaţie.
3. **(1 pct.)** Enunţaţi teorema impulsului în mişcarea unui sistem de puncte materiale sau a unui solid rigid.

II. (6 pct.)

4. (1 pct.) Un corp de masă $m = 4\ kg$ se află în repaus pe un plan orizontal aspru ($\mu = 0.15$). Considerand $g = 10\, m/s^2$, să se determine mărimea forţei orizontale F care aplicată asupra corpului îl deplasează cu acceleraţia $a = 4{,}5\, m/s^2$.

5. (2 pct.) Un corp de masă $m = 2\ kg$ cade liber de la o înălţime în timpul t = 2 s. Să se afle energia sa cinetică la mijlocul înălţimii.

6. (3 pct.) Două bărci de greutate $\vec{G}$ se deplasează în acelaşi sens cu aceiaşi viteză $\vec{v}$. La un moment dat din prima barcă se aruncă spre cea de-a doua o greutate $\vec{P}$ cu viteza $\vec{u}$ (faţă de bărci). Să se determine vitezele celor două bărci după aruncarea greutăţii, respectiv, primirea greutăţii.

Testul nr. 19

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Noţiunea de impuls (cazul sistemului de puncte materiale şi al solidului rigid). Teorema impulsului. Teorema mişcării centrului de masă. Conservarea impulsului.
2. **(2 pct.)** Daţi relaţiile de calcul pentru momentele de inerţie axiale şi centrifugale în cazul unei plăci plane şi omogene având forma unui disc de masă M şi rază R. Placa

Scanned with OKEN Scanner

este raportată la un sistem de axe carteziene Oxyz având originea în centrul de masă al plăcii şi axele Ox şi Oy în planul acesteia.

3. **(1 pct.)** Enunţaţi teorema de conservare a momentului cinetic a unui sistem de puncte materiale sau a unui solid rigid..

II. (6 pct.)

4. (1 pct.) Un corp este ridicat pe verticală. Dacă tensiunea din cablul de ridicare este cu 50 % mai mare decât greutatea corpului, să se determine acceleraţia cu care este ridicat corpul.

5. (2 pct.) Dintr-un turn de înalţime h se aruncă niste corpuri identice de masă m, fiecare cu aceiaşi viteză iniţială v_0, dar orientată sub diferite unghiuri faţă de orizontală. Ce puteţi spune despre energia lor cinetică la ciocnirea lor cu pământul?

6. (3 pct.) Peste un scripete ce se roteşte în jurul axei orizontale Oz trece un fir inextensibil ce poartă la unul din capete o sarcină de masă m. Celălalt capăt al firului este prins de un arc vertical ce are extremitatea B fixă. Forţa de tensiune a arcului este proporţională cu alungirea lui, factorul de proporţionalitate fiind k (figura 19.1). Să se determine perioada oscilaţiilor sarcinii ştiind că masa scripetelui este M şi că firul nu alunecă pe scripete.

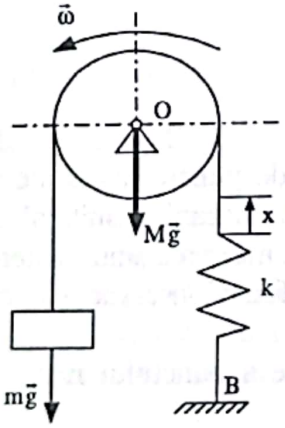


Figura 19.1

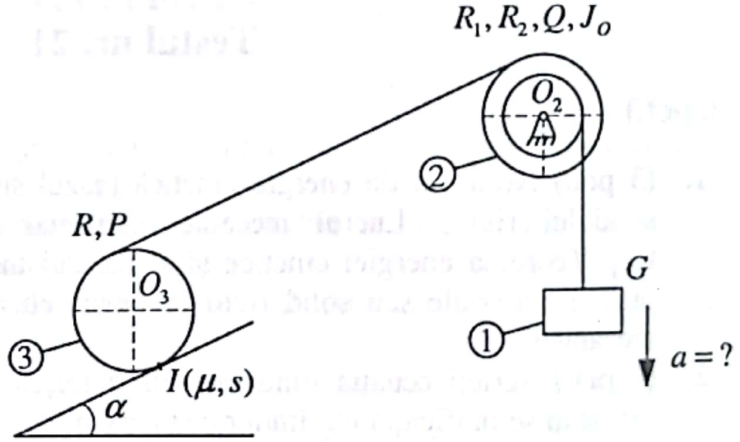


Figura 20.1

Testul nr. 20

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Noţiunea de moment cinetic (cazul sistemului de puncte materiale şi al solidului rigid). Teorema momentului cinetic în mişcarea unui sistem de puncte materiale sau solid rigid în raport cu un reper fix. Conservarea momentului cinetic.
2. **(2 pct.)** Scrieţi ecuaţia fundamentală a mişcării relative a punctului material şi explicaţi semnificaţia mărimilor ce intervin.
3. **(1 pct.)** Definiţi noţiunea de lucru mecanic elementar şi lucru mecanic finit al unei forţe.

Scanned with OKEN Scanner

II. (6 pct.)

4. (1 pct.) Care este intensitatea forţei F, cu care trebuie frânat un automobil de 7 kN pentru ca după 10 s viteza lui de 60 km/h să fie redusă la jumătate ?

5. (1 pct.) Se consideră un disc omogen de masă M = 2 kg şi rază R = 10 cm. Să se determine momentul de inerţie faţă de centrul O şi faţă de un punct A de pe periferie.

6. (4 pct.) Sistemul de corpuri din figura 20.1 este format din trei rigide şi anume:

- un corp de greutate G prins la capătul unui fir, care la celălalt capăt este înfăsurat pe cilindrul de rază R al unui troliu;
- troliul format din doi cilindri solidari de raze R_1 şi R_2, $R_1 < R_2$, având o axă de simetrie orizontală fixă. Momentul de inerţie al troliului faţă de axa de simetrie este J_O iar greutatea sa Q;
- un disc omogen de rază R şi greutate P care se află pe un plan înclinat cu unghiul α, între disc şi plan existând frecare de alunecare de coeficient μ şi de rostogolire de coeficient s; pe disc este înfăşurat un fir care la celălalt capăt este prins de cilindrul mare al troliului.

Iniţial sistemul este în repaus iar mişcarea discului este o rostogolire fără alunecare. Să se afle acceleraţia corpului 1.

Testul nr. 21

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Noţiunea de energie cinetică (cazul sistemului de puncte materiale şi al solidului rigid). Lucrul mecanic elementar şi lucrul mecanic finit al unei forţe.Teorema energiei cinetice şi a lucrului mecanic în mişcarea unui sistem de puncte materiale sau solid rigid în raport cu un reper fix. Conservarea energiei mecanice.
2. **(1 pct.)** Scrieţi ecuaţia fundamentală a mişcării absolute a punctului material şi explicaţi semnificaţia mărimilor ce intervin.
3. **(2 pct.)** Ce înţelegeţi prin rotor echilibrat static şi rotor echilibrat dinamic?.

II. (6 pct.)

4. (1 pct.) Un autoturism având masa $m_1 = 1200\,kg$ se deplasează rectiliniu şi uniform cu viteza $v_1 = 90\,km/h$. La ce viteză, un camion cu masa $m_2 = 3000\,kg$, va avea acelaşi impuls cu autoturismul? Dar aceiaşi energie cinetică?

5. (2 pct.) O bară omogenă OA, de lungime l şi greutate $\vec{G}$, se poate roti în jurul axei orizontale ce trece prin punctul O (figura 21.1). În momentul iniţial bara se găseşte în repaus la orizontală. Lăsând liberă bara, aceasta se mişcă sub acţiunea propriei greutăţi. Ştiind că momentul de frecare în articulaţia O este M_f, să se determine acceleraţia unghiulară ε în funcţie de poziţia θ a barei.

Scanned with OKEN Scanner

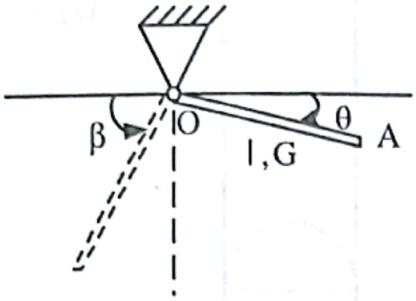


Figura 21.1

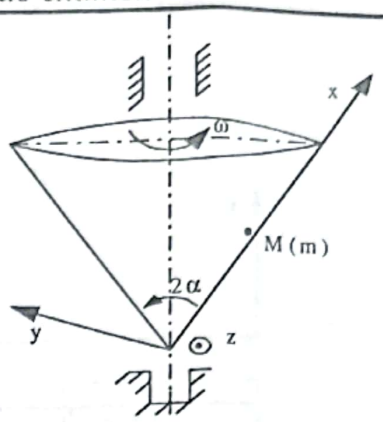


Figura 21.2

6. (3 pct.) Un vas conic având unghiul la vârf 2α se roteşte în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă ω. Pe peretele interior al vasului se află în repaus o bilă de masă m (figura 21.2). Să se determine poziţiile de echilibru relativ ale bilei şi reacţiunea normală în aceste puncte.

Testul nr. 22

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Dinamica rigidului cu axă fixă. Studiul mişcării rigidului. Determinarea reacţiunilor.
2. **(2 pct.)** Daţi formula variaţiei momentelor de inerţie faţă de axe concurente şi explicaţi semnificaţia mărimilor care intervin.
3. **(1 pct.)** Care din următoarele formule exprimă teorema momentului cinetic în mişcarea absolută a unui punct material ?

a) $\frac{d\vec{H}}{dt}=\vec{F}$; b) $\vec{K}_0=\vec{r}\times\vec{H}$; c) $\frac{d\vec{K}_o}{dt}=\vec{M}_0$; d) $E=\frac{1}{2}mv^2$.

II. (6 pct.)

4. (1 pct.) Ce masă trebuie să aibă un corp pentru ca ridicându-l vertical în sus, uniform, pe o distanţă $d=1\ m$, să efectuam un lucru mecanic $L = 1\ J$?

5. (2 pct.) Să se determine momentul de inerţie al unei bare drepte AB, de lungime L, la care densitatea variază liniar de la valoarea ρ_1 (în capătul A) la valoarea ρ_2 (în capătul B), faţă de centrul C al barei (figura 22.1).

6. (3 pct.) Se consideră sistemul de corpuri din figura 22.2 pentru care se cunosc greutăţile G şi Q şi razele R şi r ale celor două discuri omogene. Stiind că discul de greutate G este acţionat de un moment motor constant M, să se determine acceleraţia a_A a centrului de masă A al discului mobil 2.

Scanned with OKEN Scanner

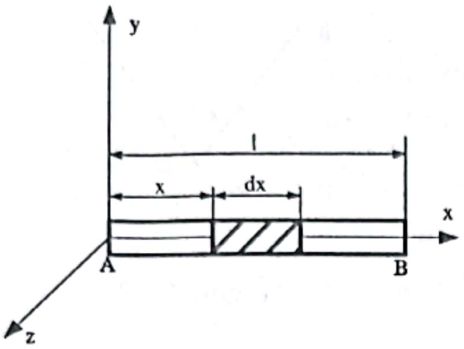


Figura 22.1

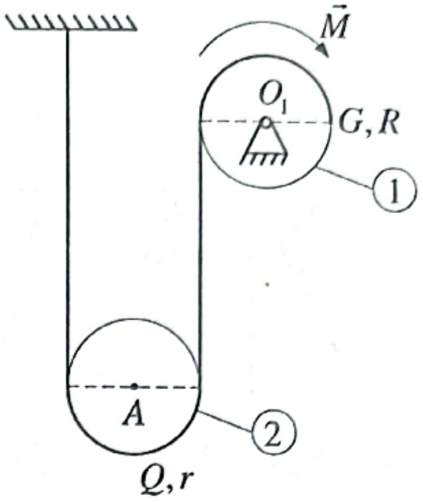


Figura 22.2

Testul nr. 23

I. (6 pct.)

1. **(3 pct.)** Dinamica mişcării plan – paralele a solidului rigid.
2. **(2 pct.)** Axe şi momente de inerţie principale.
3. **(1 pct.)** Prezentaţi pe scurt cele două probleme generale ale dinamicii punctului material liber (problema directă şi problema inversă)

II. (6 pct.)

4. (1 pct.) Un schior, după ce atinge viteza $v = 8$ m/s urcă pe o pistă înclinată de pantă p = 10%. Până la ce înălţime va urca schiorul? Coeficientul de frecare la alunecare cu zăpada este $\mu = 0.02$.

5. (1 pct.) O bară omogenă are masa $M = 2$ kg şi lungimea $L = 80$ cm. Să se determine momentul de inerţie polar faţă de un punct M situat pe bară la o treime din lungimea ei.

6. (4 pct.) Corpul omogen C, de greutate G, este format din trei roţi solidare de raze R, $2R$ şi $3R$ (figura 23.1). Prin roata de rază maximă corpul C se poate rostogoli fără alunecare pe un plan înclinat cu unghiul α faţă de orizontală. Pe celelalte două roţi sunt înfăşurate în sensuri opuse două fire care trec peste câte un scripete de masă neglijabilă, la capătul lor fiind atârnate două corpuri de greutăţi P. Stiind că momentul de inerţie al corpului C faţă de axa O este $J = \frac{7}{2}\frac{G}{g}R^2$ şi că rostogolirea se face cu frecare de coeficient de frecare s, să se determine acceleraţia fiecărui corp în parte (atunci când corpul 3 coboară).

Scanned with OKEN Scanner

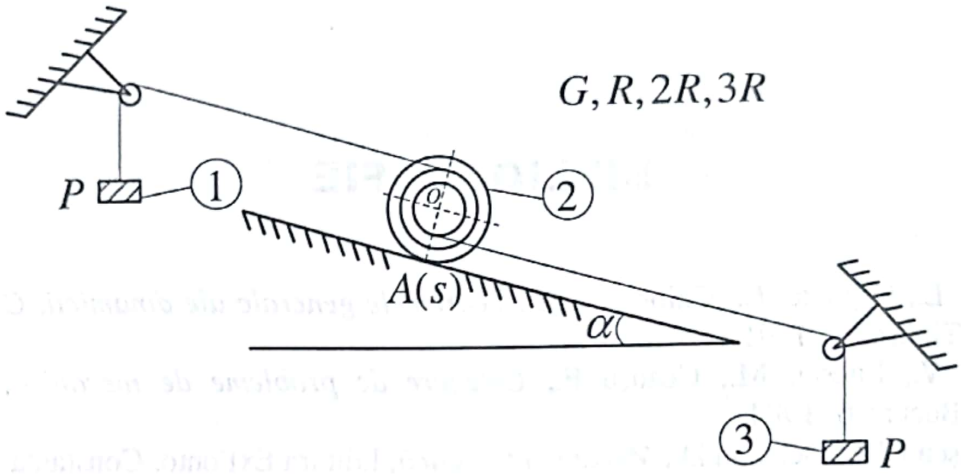


Figura 23.1

Scanned with OKEN Scanner

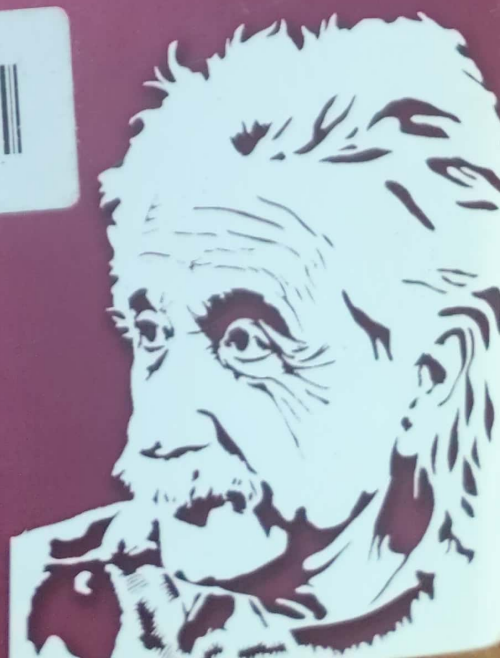
Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Brândeu L., Orgovici L., Chioreanu M., *Teoremele generale ale dinamicii, Culegere de probleme*, Timişoara, 1991.
2. Ceauşu V., Enescu M., Ceauşu F., *Culegere de probleme de mecanică*, Institutul Politehnic Bucureşti, 1984.
3. Dumitraşcu Ghe., Deleanu D., *Mecanică teoretică*, Editura ExPonto, Constanţa 1998.
4. Deleanu D., *Mecanica, Teorie şi aplicaţii,* Editura CRIZON, Constanţa, 2008.
5. Deleanu D., Dumitraşcu Ghe., *Seminarii de mecanică*, Editura Printech, Bucureşti, 2002.
6. Deleanu D., Dumitraşcu Ghe., *Statica, Culegere de probleme,* Editura Printech, Bucureşti, 2000.
7. Deleanu D., Dumitraşcu Ghe., *Cinematica, culegere de probleme*, Editura Printech, Bucureşti, 2000.
8. Deleanu D., Dumitraşcu Ghe., *Dinamica, Culegere de probleme*, Editura Printech, Bucureşti, 1999.
9. Iacob C., *Mecanică teoretică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
10. Landau L., Lifşiţ F., *Mecanica*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966.
11. Niculescu M, Dinculescu N., Marcus S., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.
12. Olariu V., Sima P., Achiriloaie V., *Mecanică teoretică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.
13. Olariu V., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
14. Ripianu A., Popescu P., Bălan B., *Mecanică teoretică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
15. Roşca I., *Mecanică pentru ingineri*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 1998.
16. Roşculeţ M., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
17. Silaş M., *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
18. Targ S., *Theoretical Mechanics*, Editura Mir, Moscova, 1975.
19. Tocaci E., *Mecanică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
20. Voinea R, Voiculescu D., Ceauşu V., *Mecanică,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

Scanned with OKEN Scanner

100025091003500



Editura CRIZON
www.crizon.ro
9 789731 909578